

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ANIZOTROPIA HADRÓNOVEJ PRODUKCIE V
ULTRARELATIVISTICKÝCH JADROVÝCH
ZRÁŽKACH

BAKALÁRSKA PRÁCA

2016

JAKUB ČIMERMAN

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE
FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

ANIZOTROPIA HADRÓNOVEJ PRODUKCIE V
ULTRARELATIVISTICKÝCH JADROVÝCH
ZRÁŽKACH

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program: Fyzika
Študijný odbor: 1160 Fyzika
Školiace pracovisko: Katedra jadrovej fyziky a biofyziky
Školiteľ: Doc. Dr. Boris Tomášik

Bratislava, 2016
Jakub Cimerman



ZADANIE ZÁVEREČNEJ PRÁCE

Meno a priezvisko študenta: Jakub Cimerman
Študijný program: fyzika (Jednoodborové štúdium, bakalársky I. st., denná forma)
Študijný odbor: 4.1.1. fyzika
Typ záverečnej práce: bakalárska
Jazyk záverečnej práce: slovenský
Sekundárny jazyk: anglický

Názov: Anizotropia hadrónovej produkcie v ultrarelativistických jadrových zrážkach
Anisotropy of hadron production in ultrarelativistic nuclear collisions

Cieľ: Horúca hmota, generovaná v jadrových zrážkach pri najvyšších energiách vykazuje fluktuácie a nehomogenity. Tie majú za následok jej anizotrópne rozpínanie a v konečnom dôsledku merateľnú anizotropiu rozdelení produkovaných hadrónov. Porovnaním meraných anizotropií so simulovanými sa snažíme zistiť, akú má horúca silno interagujúca hmota transportné vlastnosti.
V práci bude vysvetlený spôsob parametrizácie experimentálnych dát. Hlavným cieľom tejto práce bude podať prehľad o tom, ako merané anizotropie hadrónových spektier súvisia s dynamikou horúcej hmoty.

Literatúra: Literatúra:
[1] W. Florkowski: Phenomenology of ultrarelativistic heavy-ion collisions, World Scientific, 2010.
[2] R. Stock: Relativistic heavy-ion physics, Landolt-Bornstein collection, Springer, 2010
[3] R.C. Hwa: Quark-gluon plasma 4, World Scientific, 2010
[4] B. Tomášik: Disentangling spatial and flow anisotropy, in Acta Physica Polonica B 36 (2005) 2087
[5] M. Csanad, B. Tomášik, T. Csorgo: Interplay between the azimuthally dependent HBT radii and the elliptic flow, in European Physical Journal A37 (2008) 111
[6] B. Tomášik, U.A. Wiedemann: Central and non-central HBT from AGS to RHIC, in Quark-gluon plasma 3 (R.C. Hwa, X.-N. Wang ed.), World Scientific, 2003

Vedúci: RNDr. Boris Tomašik
Katedra: FMFI.KJFB - Katedra jadrovej fyziky a biofyziky
Vedúci katedry: doc. RNDr. Stanislav Tokár, CSc.
Dátum zadania: 24.03.2015

Dátum schválenia: 24.03.2015

prof. RNDr. Jozef Masarik, DrSc.
garant študijného programu



85159729

Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky

.....
š student

.....
vedúci práce

Pod'akovanie:

Touto cestou by som sa chcel poďakovať Doc. Dr. Borisovi Tomášikovi za pomoc, odborné vedenie, cenné rady a pripomienky pri vypracovaní mojej bakalárskej práce.

Abstrakt

Už niekoľko desiatok rokov skúmajú vedci vo svetových laboratóriách zrážky atómových jadier pri vysokých energiách. Jedným z ich cieľov je skúmanie kvarkovo-gluónovej plazmy, ktorá pri týchto zrážkach vzniká. Po zrážke sa plazma postupne mení na plyn hadrónov nazývaný tiež horúca hmota. Tá v dôsledku nehomogenity počiatočného rozdelenia hustoty energie nie je homogénna a expanduje nerovnomerne. To má za následok merateľnú anizotropiu produkcie hadrónov. Anizotropia horúcej hmoty môže byť priestorová alebo expanzná. Aby sme zistili vlastnosti horúcej hmoty, musíme vytvoriť teoretický model. Z modelu vieme simulovať dáta, ktoré môžeme porovnávať s experimentálne nameranými dátami. Samotné meranie hybnostného spektra však na určenie vlastností nestačí. Preto sa okrem neho merajú aj korelačné polomery. Azi-mutálna závislosť týchto veličín nám porovnaním s našim modelom vie povedať viac o vlastnostiach horúcej hmoty.

Kľúčové slová: Zrážky častíc, horúca hmota, priestorová anizotropia, expanzná anizotropia, hybnostné spektrum, korelačné polomery

Abstract

Scientists in world laboratories investigate high energy collisions of atomic nuclei for several decades. One of their objectives is research of quark-gluon plasma, which is created in these collisions. After collision, plasma changes into a gas of hadrons. The hot drop of matter is customarily called fireball. This fireball isn't homogeneous and expands anisotropically due to inhomogeneities of the initial energy density distribution. This leads to measurable anisotropy of produced hadrons. The anisotropy of the fireball can show up in its shape and expansion. To find out the properties of fireball, we have to create its theoretical model. We can simulate data from the model, which we can compare with experimentally measured data. However, measuring momentum spectrum isn't enough to determine the properties. Due to this we also measure correlation radii. Azimuthal dependence of these quantities can tell us more about the properties of fireball by comparing it with our model.

Keywords: Particle collisions, fireball, space anisotropy, flow anisotropy, momentum spectrum, correlation radii

Predhovor

Od roku 2000, kedy bola objavená kvarkovo-gluónová plazma, je predmetom skúmania mnohých vedcov. Jej časový vývoj je opísaný mnohými modelmi, ktoré sa snažia čo najpresnejšie predpovedať jej správanie. Jedným z nich je aj model tlakovej vlny, o ktorom je táto práca.

Krátko po objavení plazmy sa tiež zistilo, že kvôli necentrálnosti zrážok vzniká eliptická anizotropia v produkcii častíc. Modely sa tomu prispôbili a zahrnuli anizotropiu do výpočtov. Pred desiatimi rokmi bol aj model tlakovej vlny rozvinutý do druhého rádu. Pred niekoľkými rokmi však výsledky experimentov ukázali, že plazma vykazuje aj anizotropiu vyšších rádov. Práve rozvojom modelu tlakovej vlny do tretieho rádu sa zaoberá táto práca.

V prvých dvoch kapitolách našej práce je opísaný model tlakovej vlny, ktorý používame. Je tu vysvetlený spôsob parametrizácie anizotropií a tiež opísaná emisná funkcia, ktorá charakterizuje emisiu hadrónov. V tretej a štvrtej kapitole sa venujeme hybnostnému spektru. Je tu vysvetlené, čo to vlastne je a ako sa to dá vypočítať. Urobené sú tiež numerické výpočty spektra. Ďalej je tu rozvinuté spektrum do Fourierovho radu a vypočítané jeho koeficienty. V posledných dvoch kapitolách sú odvodené HBT polomery z korelačnej funkcie a taktiež ich rozvoj do Fourierovho radu. Opäť sú tu spravené aj numerické výpočty polomerov aj ich Fourierovych koeficientov. Na konci práce sú porovnané naše vypočítané dáta s experimentálne nameranými.

Obsah

Predhovor	vii
Zoznam obrázkov	x
Zoznam použitých skratiek, značiek a konštánt	xi
Úvod	1
1 Emisia hadrónov	3
1.1 Voľba súradníc	3
1.2 Smer expanzie	4
1.3 Emisná funkcia	5
2 Parametrizácia anizotropie	7
2.1 Priestorová anizotropia	7
2.2 Expanzná anizotropia	8
3 Hybnostné spektrum	12
3.1 Výpočet spektra	12
3.2 Rombergova metóda integrovania	13
3.3 Numerické výpočty	13
4 Azimutálna závislosť hybnostných spektier	16
4.1 Výpočet Fourierových koeficientov	16
4.2 Numerické výpočty	17
5 HBT polomery	21
5.1 Korelačná funkcia	21
5.2 Gaussova parametrizácia	23
5.3 HBT polomery	24
6 Azimutálna závislosť HBT polomerov	28
6.1 Fourierov rozvoj HBT polomerov	28

<i>OBSAH</i>	ix
6.2 Porovnanie s experimentálnymi výsledkami	30
Záver	35
Literatúra	37
Príloha A	39

Zoznam obrázkov

1.1	Rozdiel medzi uhlami	5
2.1	Tvar horúcej hmoty	8
2.2	Rýchlostné pole v horúcej hmote	10
2.3	Kombinácia priestorovej a expanznej anizotropie	11
3.1	Tvar spektra pre rôzne ϕ	14
3.2	Závislosť spektra od parametrov anizotropie	15
4.1	Závislosť koeficientu v_3 od parametrov anizotropie	18
4.2	Tvar horúcej hmoty, ktorá dosahuje najväčšie v_3	19
4.3	Vrstevnicové grafy koeficientov v_2 a v_3	20
5.1	Vzťah <i>osl</i> súradníc ku klasickým súradniciam	23
5.2	Závislosť HBT polomeru R_o^2 od parametrov anizotropie	26
5.3	Závislosť HBT polomeru R_s^2 od parametrov anizotropie	27
6.1	Vrstevnicové grafy relatívnych Fourierových koeficientov tretieho rádu .	30
6.2	Vrstevnicový graf anizotropie R_o^2 šiesteho rádu	31
6.3	Prekrytie vrstevnicových grafov	31
6.4	Prekrytie vrstevnicových grafov s vyznačenými nameranými hodnotami.	32
6.5	Porovnanie nameraných a vypočítaných dát závislosti $R_s^2(\phi)$	33
6.6	Rýchlostné pole horúcej hmoty odpovedajúce experimentálnym dátam.	33
6.7	Závislosti koeficientov anizotropií od pričnej hybnosti pre namerané dáta.	34

Zoznam použitých skratiek, značiek a konštánt

SPS	Super Proton Synchrotron
CERN	Európska organizácia pre jadrový výskum
AGS	Alternating Gradient Synchrotron
BNL	Brookhaven National Laboratory
RHIC	Relativistic Heavy Ion Collider
LHC	Large Hadron Collider
STAR	Solenoidal Tracker at RHIC
HBT	Hanbury Brown & Twiss
PHENIX	Pioneering High Energy Nuclear Interaction eXperiment
MeV	megaelektrónvolt ($1 \text{ MeV} = 1,602 \times 10^{-13} \text{ J}$)
fm	femtometer
p_t	priečna hybnosť
m_t	priečna hmotnosť
Y	pozdĺžna rapidita
x^μ	štvorvektor polohy
u^μ	štvorvektor rýchlosti
p^μ	štvorvektor hybnosti
τ	pozdĺžny vlastný čas
η	časopriestorová rapidita
ϕ	uhol, pod ktorým sledujeme emisiu hadrónov
θ	polárny uhol
θ_b	uhol kolmý na povrch horúcej hmoty
E^*	energia meraná v pokojovej sústave
T	teplota vymrznutia
ρ	priečna rapidita
τ_0	vlastný čas vymrznutia
$\Delta\tau$	rozptyl vlastného času vymrznutia

$d\Sigma_\mu$	element plochy horúcej hmoty
R_0	základný polomer horúcej hmoty
a_n	parametre priestorovej anizotropie
ρ_n	parametre expanznej anizotropie
θ_n	parametre rotácie anizotropií
$P(p_t, \phi)$	jednočasticové hybnostné spektrum
$P_2(p_1, p_2)$	dvojčasticové hybnostné spektrum
$S(x, p)$	emisná funkcia
$J(\bar{r}, \varphi)$	jacobián transformácie súradníc
v_n	koeficienty Fourierovho rozvoja hybnostného spektra
$C(q, K)$	korelačná funkcia
R_μ^2	korelačné polomery
$m_\pi = 139,57 \text{ MeV}/c^2$	hmotnosť piónu
$m_K = 493,67 \text{ MeV}/c^2$	hmotnosť kaónu
$m_p = 938,27 \text{ MeV}/c^2$	hmotnosť protónu

Úvod

Určiť zloženie hmoty je jednou zo základných úloh fyziky. Vedcom sa už podarilo dokázať, že sa hmota skladá z atómov, tie sa ďalej skladajú z hadrónov a hadróny sa skladajú z kvarkov. Za normálnych podmienok sa kvarky zoskupujú vo dvojiciach v mezónoch alebo v trojiciach v baryónoch. Pri veľmi vysokých tlakoch a teplotách je ale hustota hadrónov tak vysoká, že silná interakcia začne pôsobiť aj medzi kvarkami dvoch rôznych hadrónov a vznikne plyn oslobodených kvarkov a gluónov. Takéto skupenstvo látky nazývame kvarkovo-gluónová plazma. Pre fyziku je dôležitá najmä kvôli tomu, že tvorila vesmír pár milisekúnd po Veľkom tresku.

Teóriu o kvarkovo-gluónovej plazme priniesli teoretici v roku 1975. V 80. rokoch 20. storočia tak začali experimenty, ktoré mali dokázať existenciu tohoto skupenstva. Ako prví sa o to pokúšali vedci na urýchľovači Bevalac v meste Berkeley. Nepodarilo sa im ale vytvoriť dostatočne veľkú energiu pre vznik plazmy. Neskôr sa o to úspešnejšie pokúšali na urýchľovačoch SPS v CERN-e a AGS v laboratóriu BNL. Po získaní dostatočného množstva dát mohli vedci z CERN-u oficiálne vyhlásiť kvarkovo-gluónovú plazmu za objavenú v roku 2000. Ďalšie experimenty, v ktorých sa vedci snažia získať nové informácie, prebiehajú dodnes na urýchľovačoch RHIC v USA a LHC vo Švajčiarsku. V týchto experimentoch sa vedci snažia zistiť niečo viac o vlastnostiach plazmy.

Ultrarelativistické zrážky

A ako sa vlastne takáto plazma hľadá? Kvarkovo-gluónová plazma vznikla v dôsledku Veľkého tresku. Preto ak ju chceme vytvoriť, musíme vytvoriť akýsi malý tresk, v ktorom budú podmienky aspoň trochu porovnateľné s tými pri vzniku vesmíru. Preto staviame obrovské urýchľovače častíc. V týchto laboratóriách urýchlime jadrá ťažkých prvkov (napr. ^{206}Pb) na rýchlosti tak blízke rýchlosti svetla, že sa pokojová energia týchto prvkov stáva zanedbateľnou oproti celkovej energii. Takéto rýchlosti nazývame ultrarelativistické. Energie pri tom môžu dosahovať hodnoty od niekoľkých GeV až po 2750 GeV/nukleon¹. Keď necháme dva takéto zväzky ťažkých jadier aby sa zrazili, môže vzniknúť hmota s hustotou energie dostatočnou pre vznik plazmy.

¹Toto je horná hranica energie na LHC.

To, že sme pri zrážke plazmu skutočne našli, nám prezradilo meranie jetov. Jety sú prúdy elementárnych častíc, ktoré vychádzajú zo zrážky v tvare kužeľa. V prípade, že plazma pri zrážke vznikla, bude interagovať s týmito jetmi, čo vedie k strate ich energie. Táto strata energie sa nazýva tlenie jetov a priamo nám dokazuje existenciu kvarkovo-gluónovej plazmy.

Pri zrážkach častíc pri najvyšších dosiahnuteľných energiách teda dochádza ku vzniku kvarkovo-gluónovej plazmy. Tá sa v dôsledku obrovskej energie postupne rozpína a chladne. Keď jej hustota energie klesne pod určitú hranicu, plazma prestane existovať a zmení sa na plyn hadrónov. Kým je hustota energie ešte dosť vysoká, hadróny sa nachádzajú dosť blízko seba na to, aby na seba pôsobili silnou interakciou. Horúca hmota sa ďalej rozpína a chladne, až dokým silná interakcia nezanikne. Vtedy začnú byť hadróny z horúcej hmoty emitované. Tento proces nazývame vymrznutie.

Experimenty ukazujú, že pri zrážkach vznikajú anizotropie v priečnom reze zrážky. Produkcia hadrónov preto závisí od azimutálneho uhla. To dokazuje, že sa v horúcej hmote po zrážke nachádzajú nehomogenity. Nehomogenity spôsobujú gradient tlaku v horúcej hmote a teda tiež kolektívny pohyb hmoty. Vytvorením hydrodynamickej simulácie a porovnaním jej výsledkov s experimentom môžeme určiť tlak v hmote. Tlak je previazaný s hustotou energie v stavovej rovnici a jeho určením by sme tak mohli nájsť stavovú rovnicu.

Na charakterizovanie anizotropií produkcie častíc vytvoríme teoretický model horúcej hmoty s priestorovou a expanznou anizotropiou, ktoré budú charakterizované istými parametrami. Následne budeme môcť vypočítať spektrum hadrónov. Toto spektrum bude azimutálne závislé, a tak ho môžeme rozložiť do Fourierovho radu. Koefficienty Fourierovho radu spektra sú jednou z merateľných veličín v zrážkach. Druhou merateľnou veličinou sú koefficienty Fourierovho radu korelačných polomerov, ktoré vieme rovnako vypočítať aj z teoretického modelu. O korelačných polomeroch budeme hovoriť podrobnejšie v kapitole 5. Následným porovnaním experimentálnych a teoretických výsledkov budeme vedieť pozorovaniu horúcej hmoty priradiť parametre odpovedajúce nášmu modelu a môžeme tak určiť stav hmoty v čase jej rozpadu.

Keďže sa jedná o prácu v oblasti relativity a jadrovej fyziky, budeme v nej používať pre zjednodušenie prirodzenú sústavu jednotiek $c = \hbar = k_B = 1$. V tejto sústave majú hmotnosť, hybnosť, energia a teplota rovnaký fyzikálny rozmer, ktorý budeme uvažovať v jednotkách MeV. Z prirodzenej sústavy jednotiek tiež vyplýva, že čas má rovnaký fyzikálny rozmer ako dĺžka, a obe veličiny budeme počítat v jednotkách fm. Zároveň platí vzťah prepájajúci tieto fyzikálne rozmery, ktorý vyplýva z toho, že $\hbar c = 1$ a tiež $\hbar c = 197,3 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$. Platí teda

$$1\text{fm} = \frac{1}{197,3 \text{ MeV}}.$$

Kapitola 1

Emisia hadrónov

Našou úlohou bolo vytvoriť teoretický model horúcej hmoty, ktorá sa rozpína a sú z nej emitované hadróny s rôznymi pričnými hybnosťami. Pozorované nehomogenity v tejto oblasti môžu byť dôsledkom dvoch typov anizotropie: priestorovej a expanznej. Priestorová anizotropia predstavuje nesymetriu tvaru horúcej hmoty (napr. elipsa). Expanzná anizotropia opisuje rozličnú rýchlosť expanzie v rôznych smeroch. Model sme vytvorili pomocou emisnej funkcie, ktorá opisuje hustotu emisie hadrónov ako funkciu miesta v horúcej hmote a hybnosti emitovaného hadrónu. Formálne ide o Wignerovu hustotu vo fázovom priestore.

1.1 Voľba súradníc

Pri zrážkach častíc sa smer zväzku označuje ako os z . Tento smer je tiež nazývaný longitudinálny alebo pozdĺžny. Pričný rez zrážky nám vytvorí transverzálnu (pričnú) rovinu definovanú súradnicami x a y .¹ Keďže budeme skúmať expanziu v pričnej rovine, má zmysel zadať si pričnú hybnosť a s ňou súvisiacu pričnú hmotnosť

$$p_t = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \quad (1.1)$$

$$m_t = \sqrt{m^2 + p_t^2}. \quad (1.2)$$

Pri ultrarelativistických rýchlostiach je vhodné zadať si veličinu, ktorá bude opisovať rýchlosť efektívnejšie. Keď má častica rýchlosť napr. 0,99998, najefektívnejšou informáciou je pre nás to, koľko má toto číslo deviatok. Takouto veličinou je pozdĺžna rapidita

$$Y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_3}{E - p_3} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + v_3}{1 - v_3} \right). \quad (1.3)$$

Rapidita má ešte jednu dôležitú vlastnosť, a to že sa pri Lorentzových transformáciach mení iba o konštantu. Pomocou rapidity môžeme napísať štvorvektor hybnosti v tvare

$$p^\mu = (m_t \cosh Y, p_t \cos \phi, p_t \sin \phi, m_t \sinh Y). \quad (1.4)$$

¹Osi x , y a z budeme číslavať klasicky, t.j. $x_1 = x$, $x_2 = y$ a $x_3 = z$.

Podobne ako hybnosti môžeme aj súradnice z a t prepísať pomocou časopriestorovej rapidity η a pozdĺžneho vlastného času τ pomocou vzťahov

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2} \quad (1.5a)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t + z}{t - z} \right). \quad (1.5b)$$

Tieto vzťahy sa dajú prepísať do tvaru

$$z = \tau \sinh \eta \quad (1.6a)$$

$$t = \tau \cosh \eta. \quad (1.6b)$$

Súradnice v priechnej rovine môžeme prepísať pomocou klasických polárnych súradníc. Štvorvektor polohy potom môžeme písať ako

$$x^\mu = (\tau \cosh \eta, r \cos \theta, r \sin \theta, \tau \sinh \eta). \quad (1.7)$$

1.2 Smer expanzie

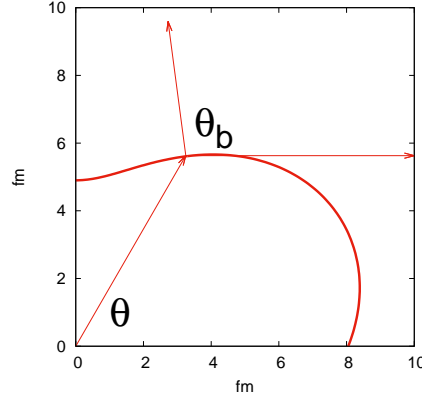
Pri emisii hadrónov z horúcej hmoty je dôležité uvedomiť si, akým smerom hmota expanduje. Je prirodzené uvažovať, že kolektívny pohyb hmoty je v smere od stredu horúcej hmoty. V prípade horúcej hmoty bez anizotropií je to jediná rozumná možnosť. Ak má hmota priestorovú anizotropiu, vzniká tu aj iná možnosť. Hmota sa môže kolektívne pohybovať v smere kolmom na svoj povrch. V tejto práci budeme uvažovať túto možnosť. Motiváciu nám k tomu dáva to, že pohyb hmoty je spôsobený rozdielnym tlakom a smer tohto pohybu je v smere najväčšieho gradientu tlaku. A ten je práve v smere kolmom na povrch. Navyše dáta namerané na detektore STAR[7] potvrdzujú správnosť tejto úvahy v prípade eliptickej anizotropie[2]. Táto skutočnosť nám do modelu pridáva ďalší uhol, ktorý budeme musieť zohľadniť v našich výpočtoch. Pre lepšiu prehľad budeme uhly označovať nasledovne:

- ϕ je uhol, pod ktorým sledujeme, ako sú hadróny emitované
- θ je uhol klasických polárnych súradníc, cez ktorý budeme integrovať emisnú funkciu
- θ_b je uhol kolmý na plochu horúcej hmoty prislúchajúci miestu na okraji hmoty ležiacom pod uhlom θ (obrázok 1.1).

Hmota expanduje pod uhlom θ_b . Jej priechnu rýchlosť tak môžeme previesť do polárnych súradníc

$$v_x = v_t \cos \theta_b \quad (1.8a)$$

$$v_y = v_t \sin \theta_b. \quad (1.8b)$$



Obr. 1.1: Rozdiel medzi uhlami. Na obrázku je znázornená definícia uhla θ_b a tiež ukážka toho, ako θ_b závisí na θ . Hrubá čiara znázorňuje okraj horúcej hmoty.

Priečna rýchlosť bude závislá od vzdialenosti od stredu hmoty. Štvorvektor rýchlosti si môžeme napísať pomocou priečnej rapidity ρ ako

$$u^\mu = (\cosh \eta \cosh \rho, \sinh \rho \cos \theta_b, \sinh \rho \sin \theta_b, \cosh \rho \sinh \eta). \quad (1.9)$$

Priečna rapidita ρ rastie so vzdialenosťou od stredu horúcej hmoty a práve ju využijeme na parametrizáciu expanznej anizotropie v nasledujúcej kapitole.

1.3 Emisná funkcia

Emisná funkcia $S(x, p)$ opisuje množstvo hadrónov s hybnosťou p_μ , ktoré boli emitované z miesta s polohou x_μ . Predpokladáme klasické tepelné rozdelenie, preto musí emisná funkcia spĺňať Boltzmanovo rozdelenie a bude úmerná výrazu

$$S(x, p)d^4x \propto e^{-\frac{E^*}{T}}, \quad (1.10)$$

kde E^* je energia meraná v pokojovej sústave expandujúcej kvapaliny. Tú môžeme určiť vynásobením štvorvektoru hybnosti so štvorvektorom rýchlosti. V Minkowského metrike dostaneme

$$\begin{aligned} E^* &= p_\mu u^\mu = m_t \cosh \rho \cosh \eta \cosh Y - p_t \sinh \rho (\cos \phi \cos \theta_b + \sin \phi \sin \theta_b) \\ &\quad - m_t \cosh \rho \sinh \eta \sinh Y = m_t \cosh \rho \cosh(\eta - Y) - p_t \sinh \rho \cos(\phi - \theta_b). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Postupným chladnutím horúcej hmoty sa hadróny v blízkosti okraja hmoty emitujú. V našom modeli vymrznutie uvažujeme ako proces, pri ktorom silná interakcia zmizne v jedinom okamihu a všetky hadróny začnú unikať z horúcej hmoty v rovnakom vlastnom čase $\tau = \tau_0$. To nám v časopriestore vytvára hyperbolickú nadrovinu vymrznutia danú rovnicou

$$\sqrt{t^2 - z^2} = \tau_0. \quad (1.12)$$

Aby sa model viac približoval skutočnosti, nepovažujeme vymrznutie za bodovú udalosť, ale za Gaussovsky rozmazanú udalosť so šírkou $\Delta\tau$. Súradnica τ tak prispieva do emisnej funkcie časťou

$$S(x, p)d^4x \propto \frac{\tau d\tau}{\sqrt{2\pi}\Delta\tau} \exp\left(-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\Delta\tau^2}\right). \quad (1.13)$$

V emisnej funkcii musíme tiež rátať s prúdom častíc vytekajúcich plochou horúcej hmoty[8]. Tento prúd vypočítame ako súčin hybnosti a elementu plochy $p^\mu d\Sigma_\mu$, kde

$$d\Sigma_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\kappa\varrho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x} \frac{\partial x^\kappa}{\partial y} \frac{\partial x^\varrho}{\partial \eta} dx dy d\eta. \quad (1.14)$$

V tomto vzťahu je $\varepsilon_{\mu\nu\kappa\varrho}$ antisymetrický tenzor, pre ktorý platí $\varepsilon_{0123} = 1$. Z tejto rovnice dostávame príspevok do emisnej funkcie v tvare

$$S(x, p) \propto m_t \cosh(\eta - Y) dx dy d\eta. \quad (1.15)$$

Emisnú funkciu tak môžeme napísať v tvare

$$\begin{aligned} S(x, p)d^4x &= \frac{m_t \cosh(\eta - Y)}{(2\pi)^3} d\eta dx dy \frac{\tau d\tau}{\sqrt{2\pi}\Delta\tau} \exp\left(-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\Delta\tau^2}\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{p^\mu u_\mu}{T}\right) \Theta(1 - \bar{r}), \end{aligned} \quad (1.16)$$

kde výraz $\frac{1}{(2\pi)^3}$ prichádza do emisnej funkcie ako objem elementárnej bunky fázového priestoru, $\Theta(x)$ je Heavisideova funkcia, ktorá je nulová pre záporné hodnoty x a rovná 1 pre kladné hodnoty. Nakoniec \bar{r} je efektívny priečný polomer, ktorý si zdefinujeme v nasledujúcej kapitole.

Kapitola 2

Parametrizácia anizotropie

Vytvorili sme model horúcej hmoty pomocou emisnej funkcie. Ďalej sme museli do tohoto modelu zahrnúť možné anizotropie. Ako sme už spomenuli, môžu nastať dva typy anizotropie: priestorová a expanzná. Aby vhodne zodpovedali realite, museli sme ich správne parametrizovať.

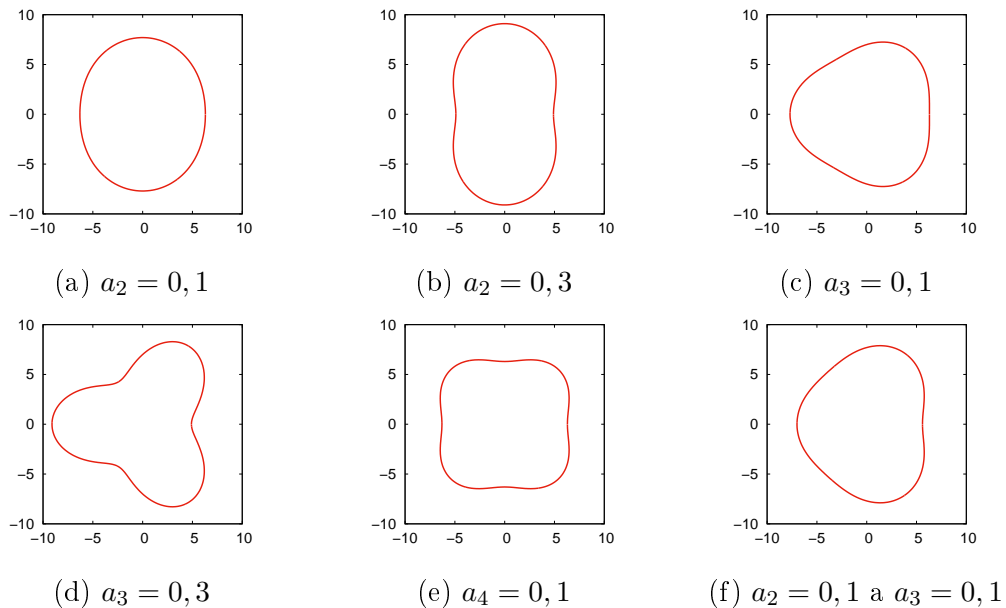
2.1 Priestorová anizotropia

Priestorová anizotropia je nerovnomernosť tvaru horúcej hmoty. Hovorí o tom, že hmota, ktorá pri zrážke vznikne, nemá v priečnej rovine tvar kruhu, ale niečoho komplikovanejšieho a radiálne nesymetrického. Najjednoduchšie sme získali parametrizáciu priestorovej anizotropie v polárnych súradniciach. Okraj horúcej hmoty sme zadefinovali pomocou polomeru $R(\theta)$, ktorý opisuje, aká je vzdialenosť okraja horúcej hmoty od stredu súradníc pod uhlom θ . Tento polomer môžeme napísať ako Fourierov rad

$$R(\theta) = R_0 \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos(n(\theta - \theta_n)) \right). \quad (2.1)$$

Vo Fourierovom rade sme vynechali prvý člen $\cos(\theta - \theta_1)$, a to kvôli tomu, že výraz $R(\theta) = R_0(1 - \cos(\theta - \theta_1))$ nezodpovedá narušeniu kruhovej symetrie, ale iba posunutiu kruhu. Dôvod, prečo sme použili znamienko mínus namiesto znamienka plus sa ukáže v kapitole 4, kedy dostaneme koeficienty v_n s rovnakým znamienkom ako parametre a_n .

Priestorová anizotropia je parametrizovaná koeficientami a_n a uhlami rotácie θ_n . Pri počítaní spektra emitovaných hadrónov budeme integrovať emisnú funkciu cez oblasť horúcej hmoty. V prípade, že súradnice x a y prevedieme do polárnych súradníc r a θ , budú hranice integrovania komplikované, pretože súradnica r má integračné hranice 0 a $R(\theta)$. Aby sme sa tomu vyhli, zadefinovali sme si bezrozmernú veličinu, ktorú sme



Obr. 2.1: Tvar horúcej hmoty. Na týchto obrázkoch môžeme vidieť tvar horúcej hmoty v závislosti od vstupných parametrov. Na obrázkoch (a) a (b) je znázornená anizotropia druhého rádu, na obrázkoch (c) a (d) anizotropia tretieho rádu a na obrázku (e) anizotropia štvrtého rádu. Na obrázku (f) je znázornená kombinácia anizotropie druhého a tretieho rádu. Obrázky sú vykresľované pre $R_0 = 7$ fm.

nazvali efektívny pričný polomer

$$\bar{r} = \frac{r}{R(\theta)}. \quad (2.2)$$

Vidíme, že \bar{r} má integračné hranice 0 a 1. S týmto polomerom môžeme súradnice x a y prepísať do tvaru

$$x = \bar{r}R_0 \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos(n(\theta - \theta_n)) \right) \cos \theta \quad (2.3a)$$

$$y = \bar{r}R_0 \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos(n(\theta - \theta_n)) \right) \sin \theta. \quad (2.3b)$$

V ďalšej časti práce sa budeme zaoberať priestorovou anizotropiou iba druhého a tretieho rádu. Pod hranicou horúcej hmoty preto budeme chápať výraz

$$R(\theta) = R_0 (1 - a_2 \cos(2(\theta - \theta_2)) - a_3 \cos(3(\theta - \theta_3))). \quad (2.4)$$

2.2 Expanzná anizotropia

Anizotropia v produkcii hadrónov však nemusí vznikáť len nesymetrickým tvarom horúcej hmoty, ale tiež nepravidelným rozložením hadrónov vo vnútri hmoty. To má za

následok, že hmota neexpanduje všetkými smermi rovnako rýchlo a hadróny z nej budú emitované do niektorých smerov viac ako do iných. Expanznú anizotropiu môžeme parametrizovať pomocou Fourierovho radu pre priečnu rapiditu. Rapidita rastie lineárne s efektívnym polomerom \bar{r} . Je to kvôli tomu, že uprostred horúcej hmoty musí byť priečna rapidita z dôvodu symetrie nulová. Pre priečnu rapiditu sme preto postulovali vzťah

$$\rho(\bar{r}, \theta_b) = \bar{r}\rho_0 \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2\rho_n \cos(n(\theta_b - \theta_n)) \right), \quad (2.5)$$

kde ρ_0 a ρ_n sú parametre tejto anizotropie.

Rozdiel oproti priestorovej anizotropii je tiež v použitom uhle. Zatiaľ čo polomer horúcej hmoty závisí od polárneho uhla θ , priečna rapidita závisí od uhla kolmého na povrch horúcej hmoty θ_b . V tomto momente musíme dodefinovať uhol θ_b aj vo vnútri hmoty. Tam je definovaný ako uhol kolmý na povrch útvaru s konštantným efektívnym polomerom \bar{r} . Uvažujeme totiž model, v ktorom hmota expanduje kolmo na svoj povrch, a preto musí mať rapidita smer daný uhlom θ_b . Po zavedení parametrizácie expanznej anizotropie môžeme v našom modeli vytvoriť rýchlostné pole pohybu horúcej hmoty (obr. 2.2).

Rovnako ako v prípade priestorovej anizotropie, aj expanznú anizotropiu budeme v práci ďalej uvažovať len do tretieho rádu. Rapiditu tak budeme môcť písať v tvare

$$\rho = \bar{r}\rho_0 (1 + 2\rho_2 \cos(2(\theta_b - \theta_2)) + 2\rho_3 \cos(3(\theta_b - \theta_3))). \quad (2.6)$$

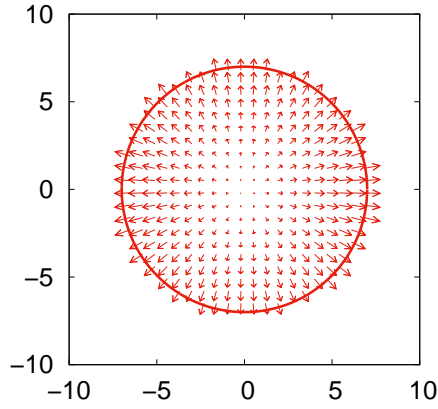
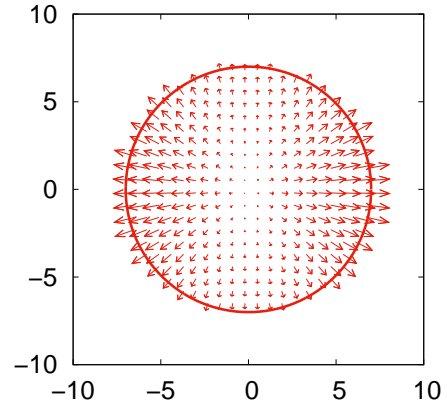
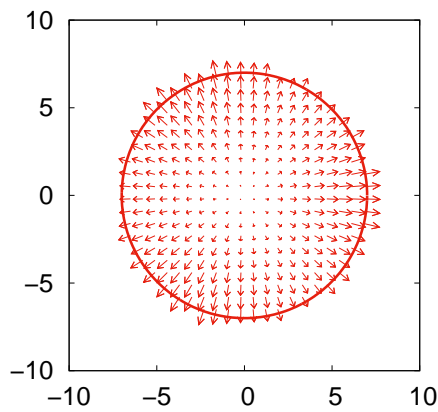
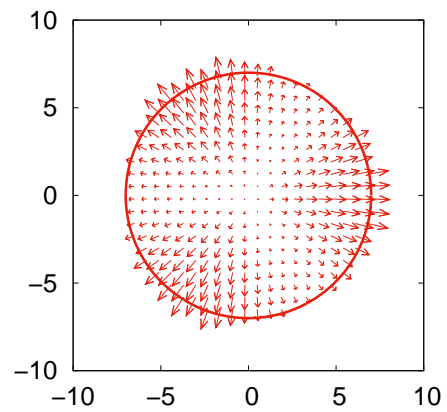
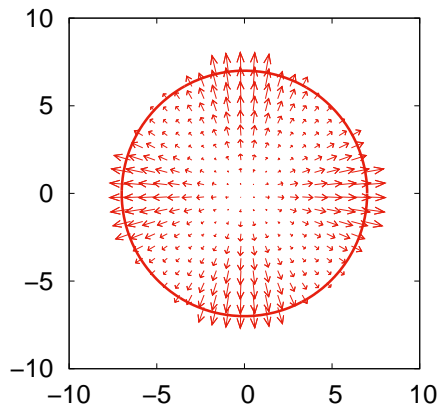
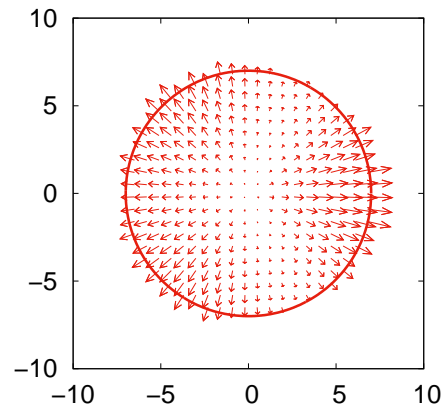
V prípade, že uvažujeme iba expanznú anizotropiu, tak je vzťah medzi uhlami θ a θ_b jednoduchý. Bez priestorovej anizotropie má horúca hmota tvar kruhu a uhly budú rovnaké. Ak ale uvažujeme kombináciu oboch anizotropií, vzťah medzi týmito uhlami bude komplikovanejší. Na jeho určenie sme potrebovali zistiť deriváciu hranice horúcej hmoty. Tá je z definície rovná tangensu uhla, ktorý zvierá dotyčnica s osou x . Preto platí

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\theta_b - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.7)$$

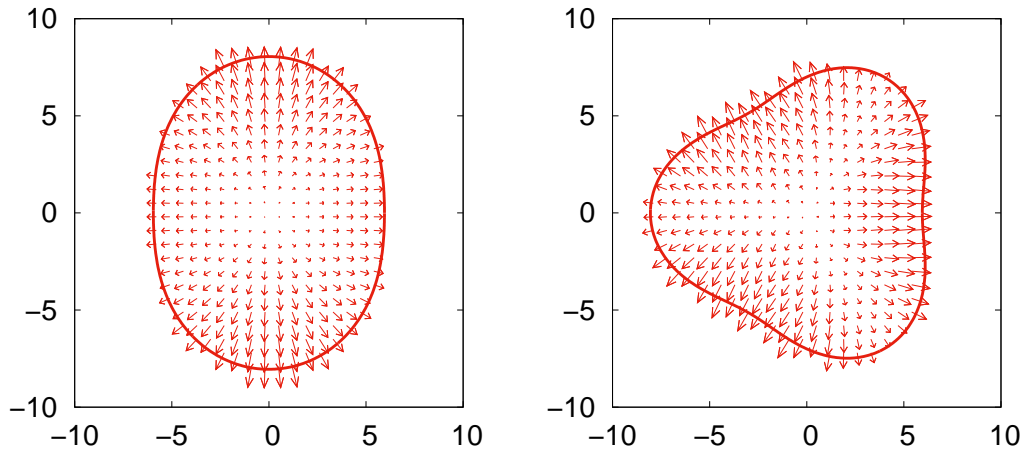
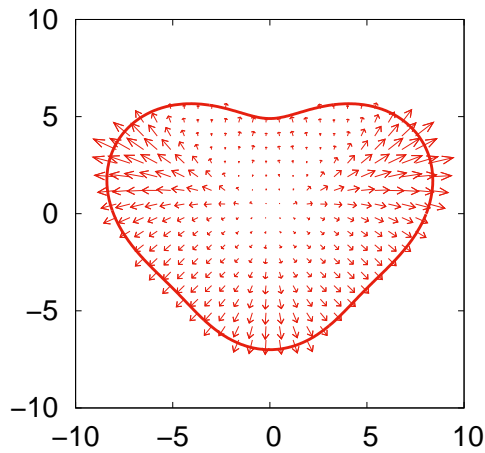
Výpočtom derivácie dostávame hľadaný vzťah medzi uhlami

$$\theta_b = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\frac{\frac{dy}{dx}}{\cos \theta} = \frac{\frac{dR(\theta)}{d\theta} \sin \theta + R(\theta) \cos \theta}{\frac{dR(\theta)}{d\theta} \cos \theta - R(\theta) \sin \theta}}{\frac{2a_2 \sin 2(\theta - \theta_2) + 3a_3 \sin 3(\theta - \theta_3)}{\cos \theta} - \frac{-1 + a_2 \cos 2(\theta - \theta_2) + a_3 \cos 3(\theta - \theta_3)}{\sin \theta}} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{2a_2 \sin 2(\theta - \theta_2) + 3a_3 \sin 3(\theta - \theta_3)}{\sin \theta} + \frac{-1 + a_2 \cos 2(\theta - \theta_2) + a_3 \cos 3(\theta - \theta_3)}{\cos \theta}}. \quad (2.8)$$

Keď už poznáme vzťah, ktorý navzájom prepája uhly θ a θ_b , môžeme nakresliť, ako bude vyzeráť rýchlostné pole v horúcej hmote aj v prípade kombinácie priestorovej aj expanznej anizotropie.

(a) $\rho_2 = 0, 1$ (b) $\rho_2 = 0, 3$ (c) $\rho_3 = 0, 1$ (d) $\rho_3 = 0, 3$ (e) $\rho_4 = 0, 3$ (f) $\rho_2 = 0, 2$ a $\rho_3 = 0, 2$

Obr. 2.2: Rýchlostné pole v horúcej hmote. Na obrázkoch sú znázornené vektorové polia zobrazujúce priečnu rapiditu a jej azimutálnu závislosť. Na obrázkoch (a) a (b) je znázornená expanzná anizotropia druhého rádu, na obrázkoch (c) a (d) anizotropia tretieho rádu a na obrázku (e) anizotropia štvrtého rádu. Na obrázku (f) je opäť znázornená kombinácia anizotropií druhého a tretieho rádu. Obrázky boli vytvorené pre vstupné parametre $R_0 = 7$ fm, $\rho_0 = 0, 8$.

(a) $a_2 = 0,15$ a $\rho_2 = -0,2$ (b) $a_3 = 0,15$ a $\rho_3 = 0,2$ (c) $a_2 = a_3 = -0,15$,
 $\rho_2 = \rho_3 = 0,2$ a $\theta_3 = \frac{\pi}{6}$

Obr. 2.3: Kombinácia priestorovej a expanznej anizotropie. Na obrázkoch sú znázornené rýchlostné polia v horúcej hmote v prípade kombinácie oboch anizotropií (a) druhého rádu, (b) tretieho rádu a (c) druhého a tretieho rádu spolu pri parametroch $R_0 = 7$ fm, $\rho_0 = 0,8$.

Kapitola 3

Hybnostné spektrum

S hotovým modelom horúcej hmoty a jeho emisnou funkciou sa môžeme pustiť do výpočtu jednočasticového spektra hadrónov. To dostaneme preintegrováním emisnej funkcie cez objem horúcej hmoty

$$P(p_t, \phi) = \frac{d^3N}{p_t dp_t dY d\phi} = \int S(x, p) d^4x. \quad (3.1)$$

3.1 Výpočet spektra

Našou úlohou bolo preintegrovať emisnú funkciu cez objem. Začneme súradnicou τ , ktorá sa dá integrovať bez väčších problémov

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{2\pi}\Delta\tau} \exp\left(-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\Delta\tau^2}\right) = \tau_0. \quad (3.2)$$

Súradnice x a y sme previedli do súradníc \bar{r} a θ pomocou vzťahov (2.3). Tieto dva integrály nevieme vypočítať analyticky, a preto sme ich museli počítať numericky. Prechodom do upravených polárnych súradníc tiež do integrálu pribudol Jacobián nových súradníc. Ten sme vypočítali ako determinant Jacobiho matice

$$J(\bar{r}, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \bar{r}} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{r}} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R(\theta) \cos \theta & \bar{r}(-R(\theta) \sin \theta + R'(\theta) \cos \theta) \\ R(\theta) \sin \theta & \bar{r}(R(\theta) \cos \theta + R'(\theta) \sin \theta) \end{vmatrix} = \bar{r}R^2(\theta). \quad (3.3)$$

Integrál cez poslednú súradnicu η vieme vypočítať analyticky:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cosh(\eta - Y) \exp\left(-\frac{m_t \cosh(\eta - Y) \cosh \rho}{T}\right) d\eta = 2K_1\left(\frac{m_t \cosh \rho}{T}\right). \quad (3.4)$$

Funkcia, ktorú sme dostali, sa nazýva modifikovaná Besselova funkcia druhého druhu. Na výpočet spektra priečných hybností nám tak ostalo integrovať emisnú funkciu cez dve súradnice.

Experimentálne je však výhodnejšie merať spektrum preintegrované cez azimutálny uhol ϕ než spektrum v každom smere, pretože nám to dáva väčší štatistický súbor. To

nám pridalo ďalší integrál, ktorý vieme počítať aj analyticky. V emisnej funkcii sa tento uhol nachádza iba v exponenciálnej časti. Takýto integrál môžeme previesť na Besselovu funkciu

$$\int_0^{2\pi} d\phi \exp\left(\frac{p_t \sinh \rho}{T} \cos(\phi - \theta_b)\right) = 2\pi I_0\left(\frac{p_t \sinh \rho}{T}\right), \quad (3.5)$$

kde I_0 je modifikovaná Besselova funkcia prvého druhu.

3.2 Rombergova metóda integrovania

Spektrum sme museli vypočítať numericky na počítači. Využili sme pri tom Rombergovu metódu numerického integrovania pomenovanú po Wernerovi Rombergovi. Tá sa využíva v numerickej analýze na odhadnutie určitého integrálu opakovanou aplikáciou Richardsonovej extrapolácie na lichobežníkovú metódu. Rombergova metóda vytvára trojuholníkový rad, ktorého každý nasledujúci člen je presnejším odhadom určitého integrálu. Keď chceme vypočítať integrál

$$\int_a^b f(x)dx, \quad (3.6)$$

tak môžeme členy tohoto radu vypočítať pomocou nasledujúcich vzťahov

$$h_n = \frac{1}{2^n}(b - a) \quad (3.7a)$$

$$R(0, 0) = h_1(f(a) + f(b)) \quad (3.7b)$$

$$R(n, 0) = \frac{1}{2}R(n - 1, 0) + h_n \sum_{k=1}^{2^{n-1}} f(a + (2k - 1)h_n) \quad (3.7c)$$

$$R(n, m) = R(n, m - 1) + \frac{1}{4^m - 1} (R(n, m - 1) - R(n - 1, m - 1)). \quad (3.7d)$$

Chyba členov radu vytvoreného Rombergovou metódou je pri tom $O(h_n^{2m+2})$. Môžeme si tiež všimnúť, že nultá extrapolácia, teda $R(n, 0)$ je ekvivalentná lichobežníkovej metóde s $2^n + 1$ bodmi a prvá extrapolácia $R(n, 1)$ je ekvivalentná Simpsonovmu pravidlu s $2^n + 1$ bodmi. Parameter m je teda stupeň extrapolácie funkcie.

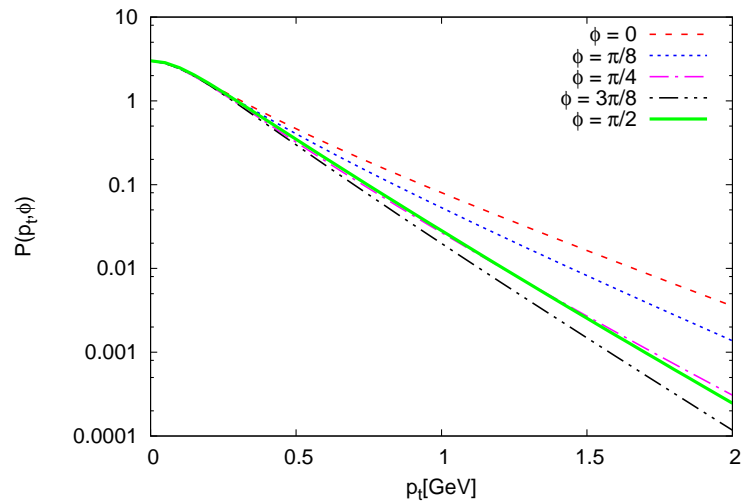
3.3 Numerické výpočty

Teraz už máme pripravený model a tiež dostatočné teoretické poznatky na to, aby sme mohli pomocou emisnej funkcie vypočítať spektrum priečných hybností. Zo vzťahov (3.1) - (3.4) ho dostávame v tvare

$$P(p_t, \phi) = \int_0^1 d\bar{r} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{m_t \tau_0}{4\pi^3} J(\bar{r}, \theta) \exp\left(\frac{p_t \sinh \rho \cos(\phi - \theta_b)}{T}\right) K_1\left(\frac{m_t \cosh \rho}{T}\right). \quad (3.8)$$

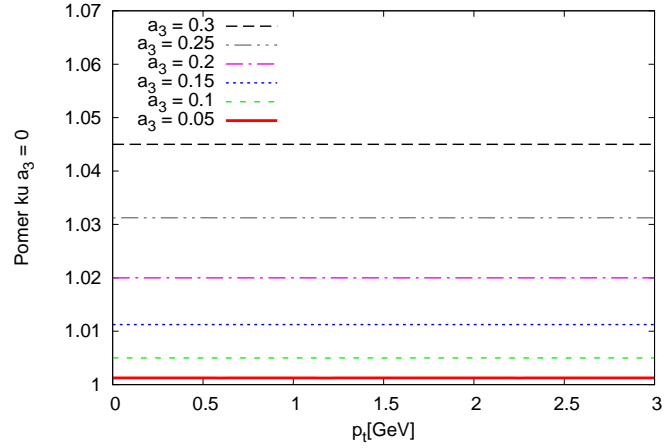
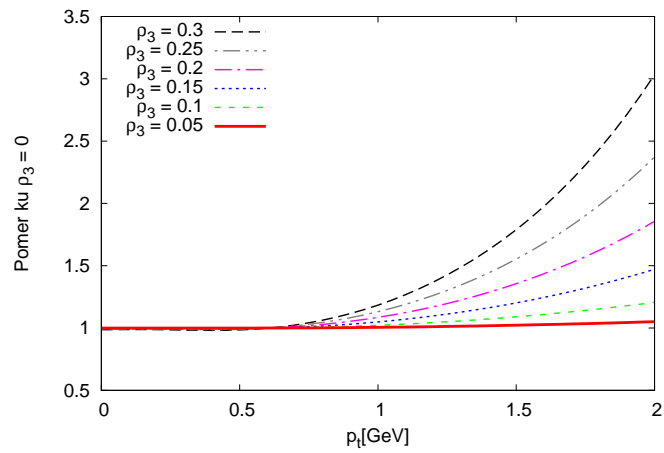
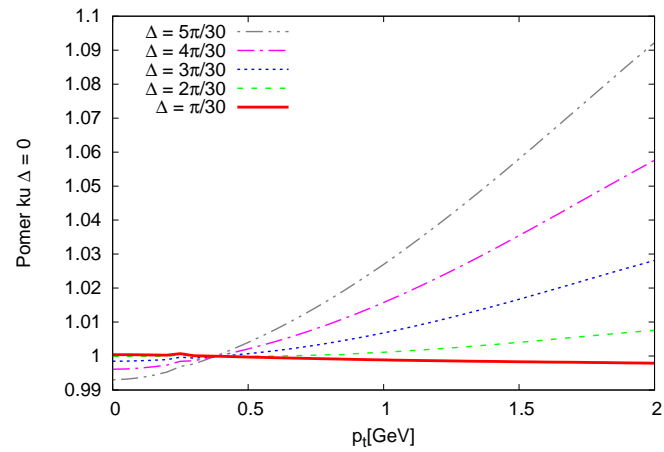
Pri nasledujúcich numerických výpočtoch sme použili hodnoty parametrov $\tau_0 = 10$ fm/c, $R_0 = 7$ fm, $T = 120$ MeV a $\rho_0 = 0,8$, ktoré sa ukazujú byť rozumnými pre jadrové zrážky. Ďalej sme za emitované hadróny považovali pióny s hmotnosťou $m_\pi = 139,57$ MeV/c².

Ako sa spektrum mení pre častice emitované pod rôznymi uhlami? Numerickým výpočtom dostávame graf, na ktorom vidíme, že uhol, pod ktorým spektrum počítame ovplyvňuje tvar tohoto spektra výrazne. Spektrum hadrónov teda závisí od uhla ϕ , čo znamená, že existuje istá závislosť, ktorú môžeme rozvinúť do Fourierovho radu.



Obr. 3.1: Tvar spektra pre rôzne hodnoty ϕ . Na grafe je znázornený tvar spektra piónov meraných pod rôznym azimutálnym uhlom ϕ . Graf je vykreslený pre hodnoty parametrov $a_2 = a_3 = \rho_2 = \rho_3 = 0,1$.

Ešte než sme sa pustili do rozvíjania do Fourierovho radu, pozreli sme sa aj na spektrum preintegrované cez ϕ a jeho závislosť na parametroch priestorovej a expanznej anizotropie. Pre lepšiu viditeľnosť sme však na graf nenanášali priamo preintegrované spektrum, ale jeho pomer pri nenulovej anizotropii k jeho veľkosti pri nulovej anizotropii. Keďže výsledky hovoria, že parametre druhého a tretieho rádu ovplyvňujú spektrum takmer rovnakým spôsobom, a navyše anizotropia druhého rádu je už preskúmaná, budeme vykresľovať iba závislosti od parametrov anizotropií tretieho rádu. Výsledné grafy na obrázku 3.2 ukazujú, že priestorová anizotropia nijakým spôsobom neovplyvňuje tvar spektra, mení iba jeho normalizáciu rádovo o pár percent. Ďalej si môžeme všimnúť, že expanzná anizotropia mení spektrum pri vysokých priečných hybnostiach niekoľkonásobne. Zaujímavé je tiež to, že aj fázový rozdiel $\Delta = \theta_3 - \theta_2$ dokáže pri vysokých priečných hybnostiach ovplyvniť spektrum o pár percent v prípade, že uvažujeme oba rády anizotropií. Inak nemá žiadny vplyv na spektrum.

(a) Závislosť spektra od a_3 (b) Závislosť spektra od ρ_3 (c) Závislosť spektra od $\Delta = \theta_3 - \theta_2$

Obr. 3.2: Závislosť spektra od parametrov anizotropie. Na grafoch sme znázornili závislosť hybnostného spektra preintegrovaného cez uhol ϕ od parametrov oboch anizotropií tretieho rádu. Grafy (a) a (b) sú vykreslené pre parametre $a_2 = \rho_2 = \theta_2 = 0$. Na obrázkoch (a) a (b) sú nulové tiež všetky parametre okrem tých, ktorých závislosť ukazujeme, a na obrázku (c) je $a_2 = a_3 = \rho_2 = \rho_3 = 0, 1$.

Kapitola 4

Azimutálna závislosť hybnostných spektier

Už sme ukázali, že spektrum hadrónov v priečných hybnostiach závisí od uhla ϕ . Navyše vieme, že táto závislosť musí byť 2π -periodická. To nám hovorí, že spektrum môžeme rozvinúť do Fourierovho radu

$$P(p_t, \phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2N}{p_t dp_t dY} \Big|_{Y=0} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n(p_t) \cos(n(\phi - \theta_n)) \right). \quad (4.1)$$

Koeficienty Fourierovho rozvoja môžeme vo všeobecnosti vyjadriť v tvare

$$v_n(p_t) = \frac{\int_0^{2\pi} P(p_t, \phi) \cos(n(\phi - \theta_n)) d\phi}{\int_0^{2\pi} P(p_t, \phi) d\phi}. \quad (4.2)$$

4.1 Výpočet Fourierových koeficientov

Pri výpočte koeficientov vo Fourierovom rozvoji sa nám opäť objavil ďalší integrál, a to cez ϕ . Objavujú sa nám tu rôzne integrály, ktoré vieme zapísať pomocou jednej formuly

$$\int_0^{2\pi} P(p_t, \phi) \cos(n(\phi - \theta_n)) d\phi, \quad (4.3)$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Práve týmto všeobecným výpočtom môžeme kedykoľvek model rozšíriť o ľubovoľný vyšší rád anizotropií. Všetky integrály vypočítame naraz. V emisnej funkcii sa uhol ϕ nachádza v exponenciálnej časti. Potrebujeme teda zintegrovat' funkciu

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos(n(\phi - \theta_n)) \exp\left(\frac{p_t \sinh \rho}{T} \cos(\phi - \theta_b)\right), \quad (4.4)$$

Na výpočet sme si zaviedli pomocný uhol $\psi = \phi - \theta_b$. Kosínus pred exponenciálnou funkciou sme tak mohli prepísať do tvaru

$$\cos(n(\phi - \theta_n)) = \cos(n\psi + n(\theta_b - \theta_n)) = \cos(i\psi) \cos(n(\theta_b - \theta_n)) - \sin(n\psi) \sin(n(\theta_b - \theta_n)). \quad (4.5)$$

Dosadením rovnice (4.5) do výrazu (4.4) dostávame dva integrály

$$\int_0^{2\pi} d\psi \cos(n\psi) \cos(n(\theta_b - \theta_n)) \exp\left(\frac{p_t \sinh \rho}{T} \cos \psi\right) \quad (4.6a)$$

$$\int_0^{2\pi} d\psi \sin(n\psi) \sin(n(\theta_b - \theta_n)) \exp\left(\frac{p_t \sinh \rho}{T} \cos \psi\right). \quad (4.6b)$$

Keďže $n \in \mathbb{N}$, tak sa výraz (4.6a) podobá na definíciu modifikovanej Besselovej funkcie prvého druhu $I_n(x)$

$$\int_0^{2\pi} d\psi \cos(n\psi) \cos(n(\theta_b - \theta_n)) \exp\left(\frac{p_t \sinh \rho}{T} \cos \psi\right) = 2\pi \cos(n(\theta_b - \theta_n)) I_n\left(\frac{p_t \sinh \rho}{T}\right). \quad (4.7)$$

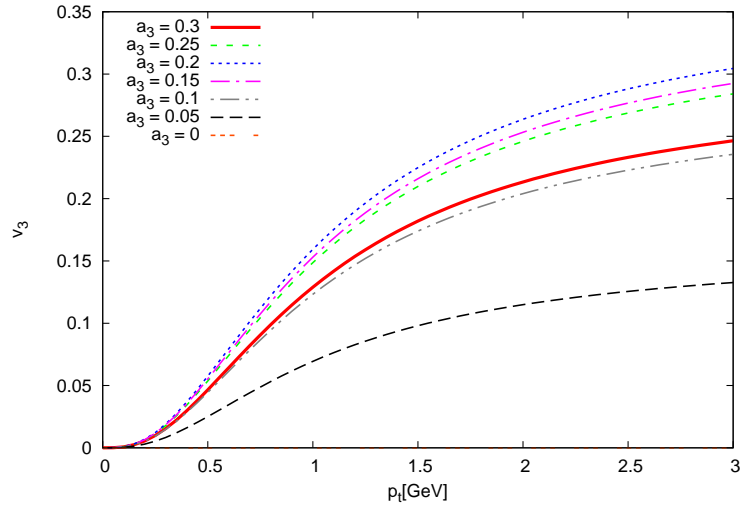
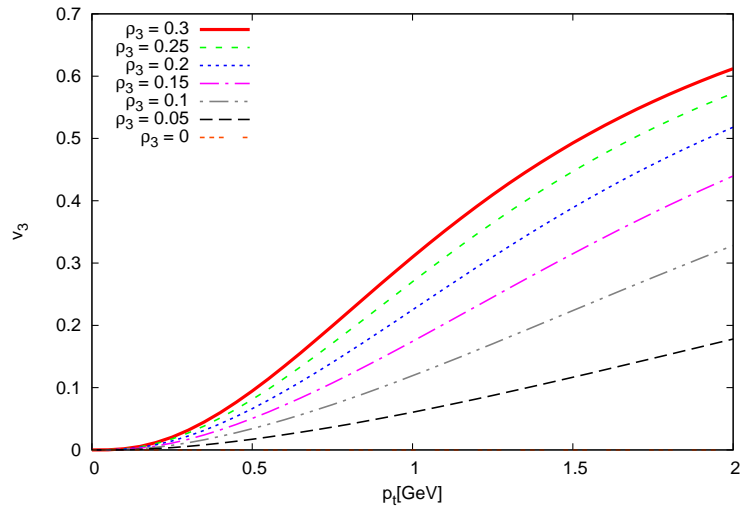
Výsledok výrazu (4.6b) sme pre $n = 0$ určili už v predchádzajúcej kapitole. Pre $n \neq 0$ integrujeme súčin sínusu, čo je funkcia nepárna vzhľadom na priamku $y = \pi$, a exponenciály kosínusu, čo je vzhľadom na $y = \pi$ funkcia párna. Súčinom párnej a nepárnej funkcie je tiež nepárna funkcia a integrál nepárnej funkcie na párnom intervale nám dáva opäť nulu. Vďaka tomu sme si mohli hľadané koeficienty Fourierovho rozvoja zapísať v tvare

$$v_n = \frac{\int_0^1 d\bar{r} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{m_t \tau_0}{2\pi^2} \cos(n(\theta_b - \theta_n)) J(\bar{r}, \theta) I_n\left(\frac{p_t \sinh \rho}{T}\right) K_1\left(\frac{m_t \cosh \rho}{T}\right)}{\int_0^1 d\bar{r} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{m_t \tau_0}{2\pi^2} J(\bar{r}, \theta) I_0\left(\frac{p_t \sinh \rho}{T}\right) K_1\left(\frac{m_t \cosh \rho}{T}\right)}. \quad (4.8)$$

4.2 Numerické výpočty

Koeficienty v_2 a v_3 sú pre nás užitočné, pretože ich dokážeme merať pri reálnych zrážkach a tiež vypočítať na základe teoretického modelu. Porovnaním výsledkov potom dokážeme z v_2 a v_3 určiť parametre anizotropií.

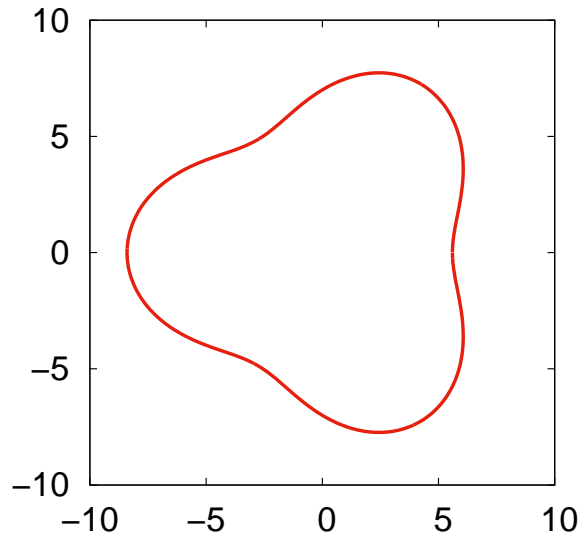
Zo symetrie vieme, že koeficient v_2 je nulový pokiaľ sú nulové parametre anizotropie druhého rádu a_2 a ρ_2 . Nezavisí teda od a_3 a ρ_3 , avšak aj tieto parametre môžu koeficient v_2 jemne ovplyvniť, ale iba ak má horúca hmota aj anizotropiu druhého rádu. Analogicky to platí aj pre koeficient v_3 . Závislosť týchto koeficientov od parametrov anizotropií je znázornená na grafoch 4.1. Je veľmi zaujímavé, že na grafe závislosti v_3 od a_3 nedosahuje maximálne hodnoty najväčšia anizotropia, ale anizotropia okolo $a_3 = 0,2$. To je spôsobené tým, že najväčšia hodnota v_3 nastáva v prípade, kedy sú častice emitované iba tromi smermi. Ako si však na obrázku 2.1d môžeme všimnúť, priveľké a_3 spôsobuje, že častice sú produkované aj v iných smeroch, pretože sa tvar horúcej hmoty prevráti do seba. Pre $a_3 = 0,2$ dostávame tvar horúcej hmoty, ktorý je najbližší trojuholníkovému tvaru s rovnými hranami. Tento tvar je zobrazený na obrázku 4.2.

(a) Závislosť v_3 od a_3 (b) Závislosť v_3 od ρ_3

Obr. 4.1: Závislosť koeficientov Fourierovho rozvoja hybnostného spektra od parametrov anizotropie pre pióny. Na obrázkoch (a) a (b) sú znázornené závislosti koeficientu v_3 od parametrov a_3 a ρ_3 . Obrázky sú vykreslené pre parametre $\tau_0 = 10\text{fm}/c$, $R = 7\text{fm}$, $T = 120\text{ MeV}$, $\rho_0 = 0,8$. Závislosť koeficientu v_2 od parametrov a_2 a ρ_2 vyzerá až na normalizáciu rovnako.

Odmeraním v_3 sme teraz schopní určiť parametre a_3 alebo ρ_3 . To ale iba v prípade, že nemáme kombináciu oboch typov anizotropie. Keď ich chceme skombinovať, musíme nakresliť taký graf, v ktorom budeme vidieť závislosť v_3 od a_3 a ρ_3 súčasne. Nakreslili sme si preto vrstevnicové grafy, na ktorých môžeme vidieť obe tieto závislosti. Tieto grafy sú znázornené na obrázku 4.3.

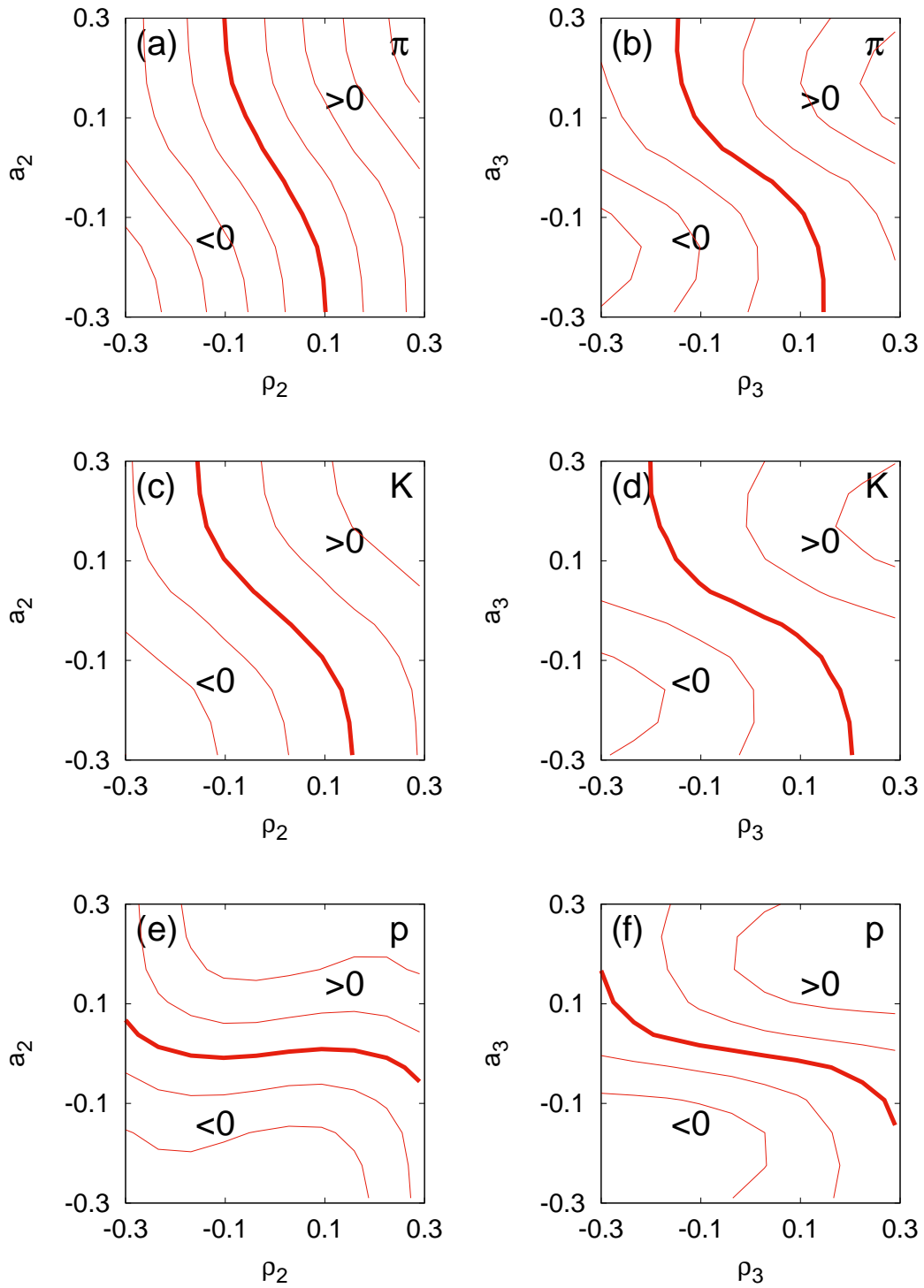
Z týchto grafov vidíme, že na zistenie vlastností horúcej hmoty nám v_2 a v_3 stačiť nebudú, pretože z nich nevieme určiť parametre anizotropií jednoznačne. Ich meraním



Obr. 4.2: Tvar horúcej hmoty, ktorá dosahuje najväčšie v_3 . V tomto prípade je anizotropia $a_3 = 0, 2$.

získame len čiaru, na ktorej budú tieto parametre ležať, avšak stále tu bude jeden stupeň voľnosti. Budeme preto potrebovať ďalšiu merateľnú veličinu, ktorou budú HBT polomery.

Na vrstevnicových grafoch si tiež môžeme všimnúť symetriu koeficientov v_2 a v_3 . Vidíme, že pokiaľ zmeníme znamienko pri koeficientoch a_2 a ρ_2 , hodnota v_2 sa nezmení, zmení sa len jeho znamienko. Hovorí nám to, že pokiaľ bude elipsa stlačená v smere osi x (namiesto y) a expanzia bude takisto väčšia v smere hlavnej osi elipsy, tak sa tvar spektra v závislosti od uhla nezmení, iba posunie o $\frac{\pi}{2}$.



Obr. 4.3: Vrstevniové grafy koeficientov v_2 a v_3 . Na obrázkoch sú znázornené vrstevniové grafy závislostí koeficientov v_2 a v_3 od parametrov anizotropie pre pióny, kaóny a protóny. Na obrázkoch (a), (c) a (e) sú vrstevniové grafy v_2 , na obrázkoch (b), (d) a (f) zase v_3 . Hrubá čiara znázorňuje vrstevnicu $v_i = 0$, tenké čiary znázorňujú nárast o 0.05 (pre pióny a kaóny), resp. o 0.02 (pre protóny). Grafy sú kreslené pre parametre $\tau_0 = 10$ fm/c, $R = 7$ fm, $T = 120$ MeV, $\rho_0 = 0,8$ a $p_t = 500$ MeV.

Kapitola 5

HBT polomery

Ďalším vhodným prostriedkom na meranie vlastností jadrových zrážok je HBT femtoskopia. Jedná sa o meranie korelácií párov identických bozónov z horúcej hmoty. Túto metódu vymysleli na meranie uhlovej veľkosti rádioastronomických zdrojov v 50. rokoch Robert Hanbury Brown a Richard Q. Twiss. Aplikácia ich metód síce nie je rovnaká ako v jadrovej fyzike, ale princípy sú.

5.1 Korelačná funkcia

Skúmame koreláciu vzniku dvoch hadrónov s hybnosťami p_1 a p_2 . Korelačnú funkciu sme si zadefinovali ako pomer dvojčasticového spektra a dvoch jednočasticových spektier. Korelačná funkcia má tvar

$$C(p_1, p_2) = \frac{P_2(p_1, p_2)}{P(p_1)P(p_2)} = \frac{E_1 E_2 \frac{d^6 N}{dp_1^3 dp_2^3}}{\left(E_1 \frac{d^3 N}{dp_1^3}\right) \left(E_2 \frac{d^3 N}{dp_2^3}\right)}. \quad (5.1)$$

Táto korelačná funkcia dosahuje hodnotu 1 vtedy, keď hadróny vôbec nekorelujú. To nastáva tiež v prípade, keď $|p_1 - p_2| \rightarrow \infty$. Naopak keď $|p_1 - p_2| \rightarrow 0$, korelačná funkcia vytvára vrchol. Z princípu neurčitosti vieme, že šírka tohoto špicu bude nepriamo úmerná veľkosti zdroja. Namiesto hybností p_1 a p_2 sme zaviedli hybnosti

$$K = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \quad (5.2a)$$

$$q = p_1 - p_2 \quad (5.2b)$$

Zdrojom častíc je horúca hmota charakterizovaná emisnou funkciou $S(x, p)$. Tú môžeme uvažovať aj ako pravdepodobnosť, že bude emitovaný hadrón s hybnosťou p z časopriestorového bodu x . Jednočasticové spektrum preto môžeme vypočítať podľa

vzťahu (3.1). Korelačnú funkciu získame pomocou Fourierovej transformácie emisnej funkcie, čím dostaneme

$$C(p_1, p_2) = C(q, K) = 1 + \frac{|\int d^4x S(x, K) \exp(iqx)|^2}{\int d^4x S(x, p_1) \int d^4x S(x, p_2)}. \quad (5.3)$$

Fyzikálne zaujímavá je práve oblasť okolo špicu, preto uvažujeme malé hodnoty q , odkiaľ potom $p_1 \approx p_2 \approx K$. Rovnica (5.3) tak prejde do tvaru

$$C(q, K) - 1 \approx \frac{|\int d^4x S(x, K) \exp(iqx)|^2}{(\int d^4x S(x, K))^2}. \quad (5.4)$$

Pomocou rovnice (5.4) si môžeme z emisnej funkcie ľahko vypočítať korelačnú funkciu. Problémom je, že práve korelačná funkcia je to, čo dokážeme merať a emisná funkcia to, čo chceme skúmať. Z tejto rovnice ale emisnú funkciu vyjadriť nevieme. Korelačnú funkciu si preto prepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} C(q, K) - 1 &= \frac{(\int d^4x S(x, K) e^{iqx}) (\int d^4y S(y, K) e^{iqy})^*}{\int d^4x S(x, K + \frac{q}{2}) \int d^4y S(y, K - \frac{q}{2})} \\ &= \frac{\int d^4x d^4y e^{iq(x-y)} S(x, K) S(y, K)}{\int d^4x d^4y S(x, K + \frac{q}{2}) S(y, K - \frac{q}{2})}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Transformáciou do súradníc $X = x - y$ a $Y = \frac{1}{2}(x + y)$ môžeme korelačnú funkciu ďalej upraviť na tvar

$$C(q, K) - 1 = \frac{\int d^4X e^{iqX} D(X, K)}{\int d^4x d^4y S(x, K + \frac{q}{2}) S(y, K - \frac{q}{2})}, \quad (5.6)$$

kde $D(X, K)$ je rozdelenie relatívnych vzdialeností definované vzťahom

$$D(X, K) = \int d^4Y S\left(Y + \frac{X}{2}\right) S\left(Y - \frac{X}{2}\right). \quad (5.7)$$

Zadefinujeme tiež normalizované rozdelenie relatívnych vzdialeností

$$d(X, K) = \frac{D(X, K)}{\int d^4Y D(Y, K)}. \quad (5.8)$$

S týmito dvomi veličinami môžeme korelačnú funkciu napísať ako

$$C(q, K) - 1 = \int d^4X e^{iqX} d(X, K). \quad (5.9)$$

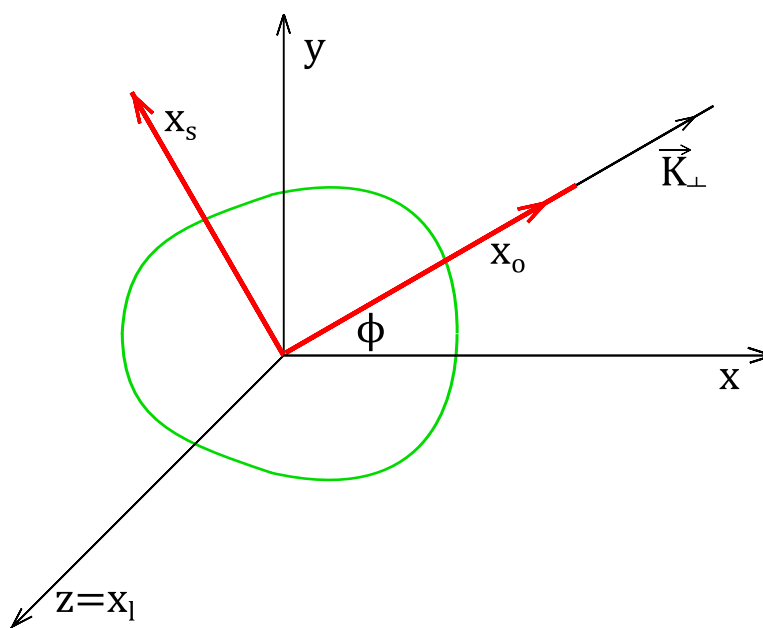
V rovnici (5.7) vidíme, že násobíme dve rovnaké rozdelenia. To nám pripomína centrálnu limitnú vetu. A aj keď 2 nie je až také veľké číslo, môžeme uvažovať, že sa korelačná funkcia bude aspoň približovať Gaussovmu rozdeleniu. Uvažujeme preto parametrizáciu

$$C(q, K) - 1 \approx \exp(-q^\mu q^\nu B_{\mu\nu}(K)). \quad (5.10)$$

Koeficient $B_{\mu\nu}(K)$ určuje šírku Gaussovho rozdelenia, ktorú chceme určiť.

V tomto momente je vhodné tiež pozmeniť sústavu súradníc. Konkrétne spravíme otočenie súradníc tak, aby os x bola otočená v smere priemetu vektora \vec{K} na priečnu rovinu. Túto os sme nazvali hlavnou x_o , os na ňu kolmú v priečnej rovine sme nazvali bočnou x_s a os z , ktorá sa nezmenila sme nazvali pozdĺžnou osou x_l ¹. Zmena súradníc je znázornená na obr. 5.1. V takýchto súradniciach je štvorvektor K rovný

$$K = (K^0, K^o, 0, K^l). \quad (5.11)$$



Obr. 5.1: Vzťah *osl* súradníc ku klasickým súradniciam. Na obrázku je zelenou farbou vyznačená horúca hmota, čiernou farbou klasické súradnice a červenou *osl* súradnice.

5.2 Gaussova parametrizácia

Korelačnú funkciu ideme skúmať v okolí bodu $q = 0$. V tomto okolí by mala mať tvar Gaussovho rozdelenia opísaného rovnicou (5.10). Korelačnú funkciu sme teda rozložili do Taylorovho radu okolo bodu $q = 0$. Na to sme potrebovali poznať prvú a druhú deriváciu korelačnej funkcie

$$\left. \frac{d}{dq} (C(q, K) - 1) \right|_{q=0} = 0 \quad (5.12)$$

¹Indexy *osl* sú z anglických výrazov *out*, *side*, *longitudinal*.

$$\frac{d^2}{dq^\mu dq^\nu} (C(q, K) - 1) \Big|_{q=0} = -2 \left(\frac{\int d^4x x_\mu x_\nu S(x, K) \int d^4y S(y, K)}{P^2(K)} - \frac{\int d^4x x_\mu S(x, K) \int d^4y y_\nu S(y, K)}{P^2(K)} \right). \quad (5.13)$$

V tomto momente je vhodné zdefinovať si strednú hodnotu funkcie $f(x)$ nasledovne

$$\langle f(x) \rangle (K) = \frac{\int d^4x f(x) S(x, K)}{\int d^4x S(x, K)}. \quad (5.14)$$

Ak ešte zavedieme značenie

$$\tilde{x}_\mu = x_\mu - \langle x_\mu \rangle, \quad (5.15)$$

dostaneme Taylorov rozvoj korelačnej funkcie do tvaru

$$C(q, K) - 1 = \frac{|\int d^4x S(x, K) \exp(iqx)|^2}{P^2(K)} \approx 1 - q^\mu q^\nu \langle \tilde{x}_\mu \tilde{x}_\nu \rangle. \quad (5.16)$$

Tento Taylorov rad je totožný s Taylorovým radom exponenciálnej funkcie, a preto môžeme korelačnú funkciu zapísať v tvare

$$C(q, K) - 1 \approx \exp(-q^\mu q^\nu \langle \tilde{x}_\mu \tilde{x}_\nu \rangle). \quad (5.17)$$

Tu sa nám podarilo určiť koeficienty $B_{\mu\nu}(K) = \langle \tilde{x}_\mu \tilde{x}_\nu \rangle (K)$.

5.3 HBT polomery

Je dôležité uvedomiť si, že štvorvektory q a K sú navzájom previazané rovnicou

$$q^\mu K_\mu = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) = 0. \quad (5.18)$$

To znamená, že iba tri zložky relatívnej hybnosti q sú nezávislé. Tú štvrtú môžeme určiť pomocou hybnosti K

$$q^0 = \vec{q} \cdot \vec{\beta} = q_o \beta_o + q_l \beta_l. \quad (5.19)$$

kde $\vec{\beta} = \vec{K}/K^0$. Navyše K^0 aproximujeme ako $K^0 = \sqrt{m^2 + \vec{K}^2}$.

Keďže si q^0 vieme vyjadriť pomocou ostatných zložiek tohoto štvorvektora, nebude sa nachádzať v Gaussovej parametrizácii. Tú tak môžeme poskladať z troch zložiek vektora \vec{q}

$$C(q, K) - 1 = \exp(-R_o^2 q_o^2 - R_s^2 q_s^2 - R_l^2 q_l^2 - 2R_{os}^2 q_o q_s - 2R_{ol}^2 q_o q_l - 2R_{sl}^2 q_s q_l), \quad (5.20)$$

kde koeficienty R_i sú korelačné polomery alebo tiež HBT polomery. Po dosadení za q^0 do rovnice (5.17) dostaneme HBT polomery v tvare

$$R_o^2(K) = \langle (\tilde{x}_o - \beta_o \tilde{t})^2 \rangle (K) \quad (5.21a)$$

$$R_s^2(K) = \langle \tilde{x}_s^2 \rangle (K) \quad (5.21b)$$

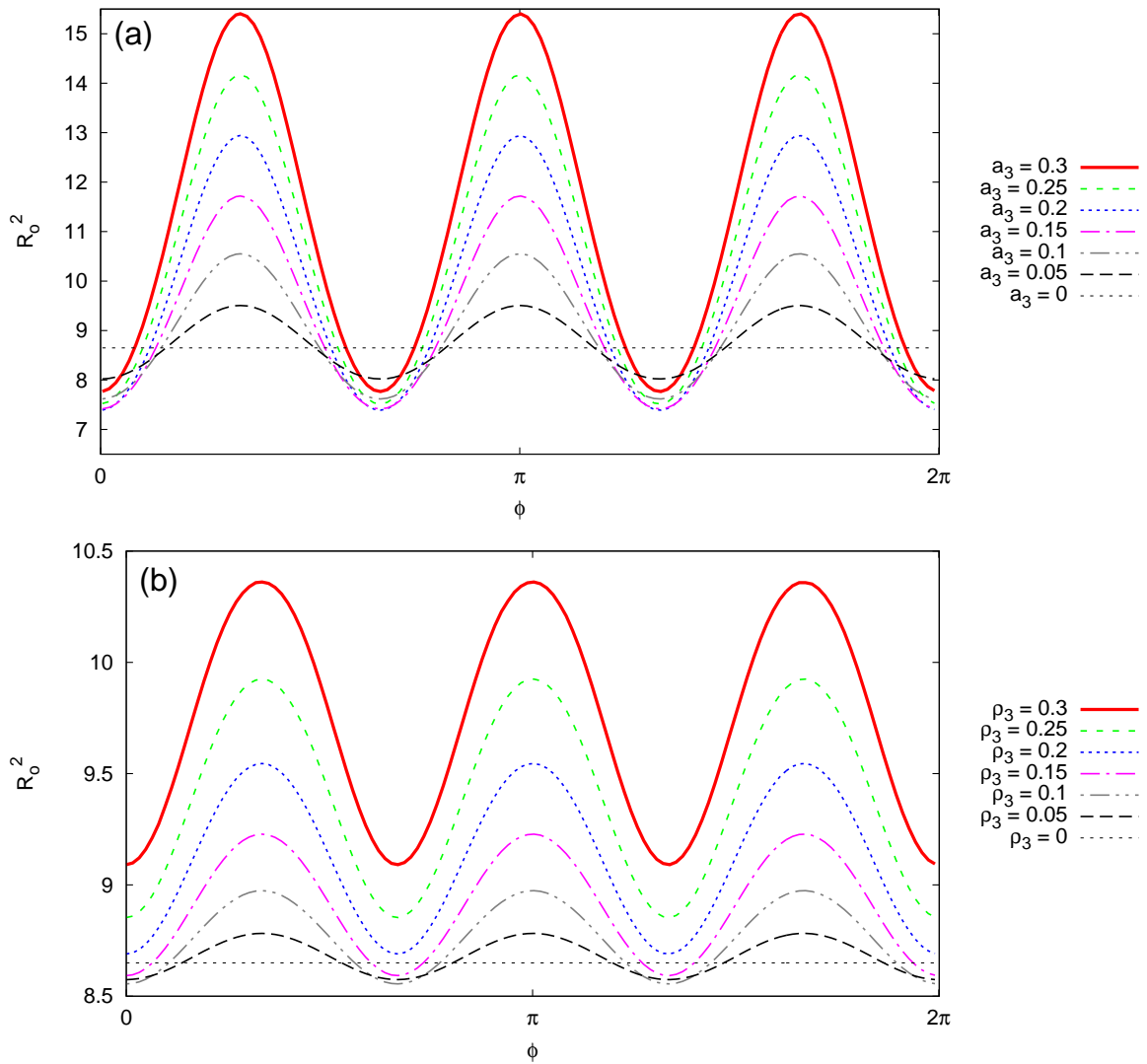
$$R_l^2(K) = \langle (\tilde{x}_l - \beta_l \tilde{t})^2 \rangle (K) \quad (5.21c)$$

$$R_{os}^2(K) = \langle (\tilde{x}_o - \beta_o \tilde{t}) \tilde{x}_s \rangle (K) \quad (5.21d)$$

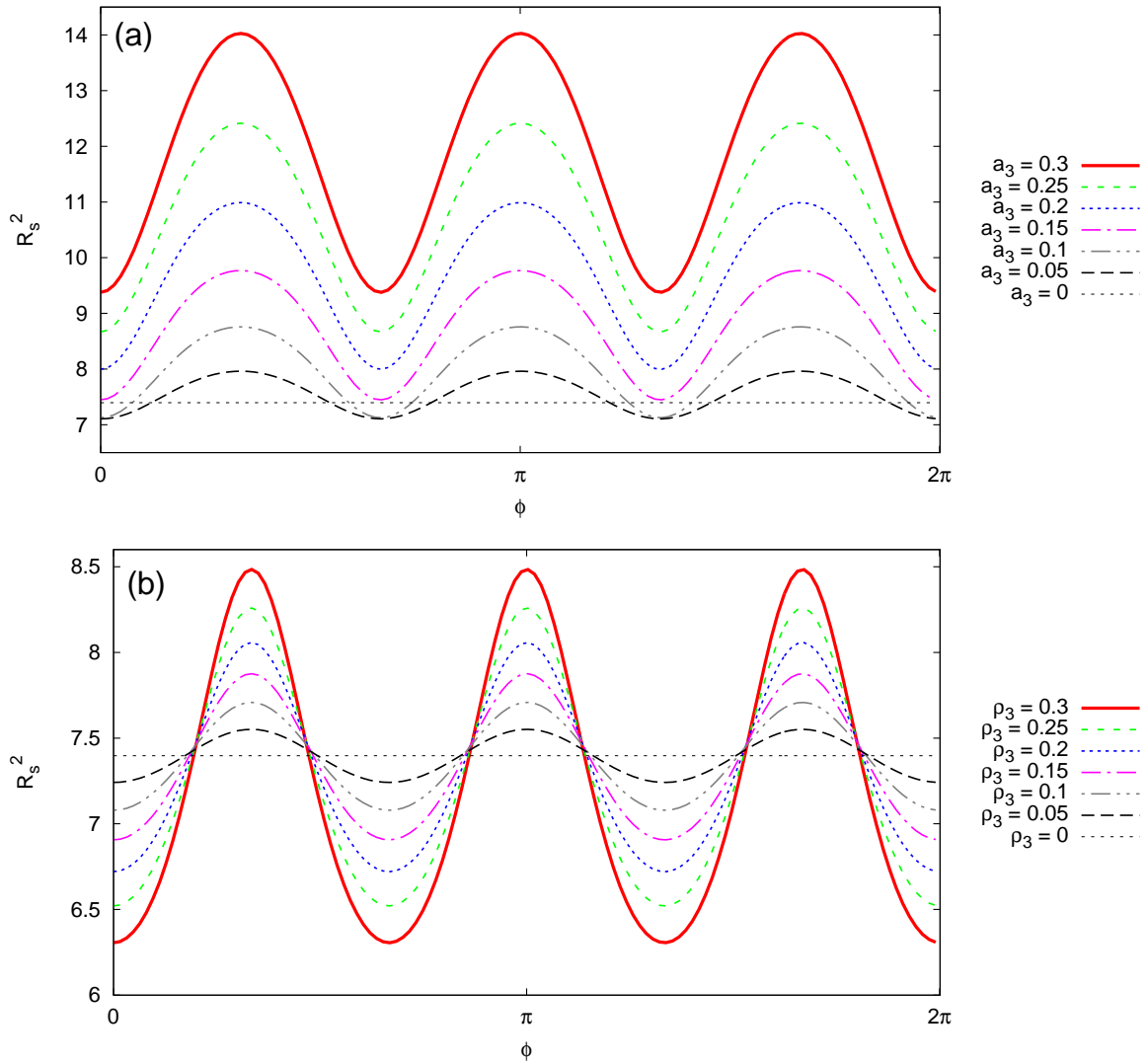
$$R_{ol}^2(K) = \langle (\tilde{x}_o - \beta_o \tilde{t}) (\tilde{x}_l - \beta_l \tilde{t}) \rangle (K) \quad (5.21e)$$

$$R_{sl}^2(K) = \langle (\tilde{x}_l - \beta_l \tilde{t}) \tilde{x}_s \rangle (K). \quad (5.21f)$$

HBT polomery nám dávajú informáciu o veľkosti oblasti, z ktorej sú emitované hadróny s danou priečnou hybnosťou. Navyše sú tieto veličiny experimentálne merateľné. Podobne ako spektrum aj HBT polomery meriame pod rôznym azimutálnym uhlom a ukazuje sa, že sú tiež azimutálne závislé. Keďže druhý rád anizotropií je už preskúmaný, zamerali sme sa na tretí rád. Na obr. 5.2 a 5.3 znázornené závislosti R_o^2 a R_s^2 od ρ_3 a a_3 . Na týchto grafoch si môžeme všimnúť, že napriek skutočnosti, že sú grafy vykresľované iba s tretím rádom anizotropie, tak sme ako výsledok nedostali čisté sínusoidy, ale vznikla nám tam aj anizotropia vyšších rádov.



Obr. 5.2: Závislosť HBT polomeru R_o^2 od parametrov anizotropie. Na grafoch sú vykreslené tvary HBT polomeru R_o^2 v závislosti od parametrov (a) a_3 a (b) ρ_3 . Grafy sú vykresľované pre pióny a pre parametre $\tau_0 = 10$ fm/c, $R_0 = 7$ fm, $T = 120$ MeV, $\rho_0 = 0,8$, $K_o = 500$ MeV a $K_l = 0$ MeV.



Obr. 5.3: Závislosť HBT polomeru R_s^2 od parametrov anizotropie. Na grafoch sú vykreslené tvary HBT polomeru R_s^2 v závislosti od parametrov (a) a_3 a (b) ρ_3 . Grafy sú vykresľované pre pióny a pre parametre $\tau_0 = 10$ fm/c, $R_0 = 7$ fm, $T = 120$ MeV, $\rho_0 = 0,8$, $K_o = 500$ MeV a $K_l = 0$ MeV.

Kapitola 6

Azimutálna závislosť HBT polomerov

Ukázali sme teda, že aj HBT polomery sú azimutálne závislé. Preto sme sa ďalej zaoberali tým, ako táto závislosť vyzerá. V prvom rade sú azimutálne závislé kvôli použitej *osl* sústave. Pri spätnom prechode do pôvodných súradníc x a y využijeme vzťahy

$$\tilde{x}_o = \tilde{x} \cos \phi + \tilde{y} \sin \phi \quad (6.1a)$$

$$\tilde{x}_s = \tilde{y} \cos \phi - \tilde{x} \sin \phi. \quad (6.1b)$$

S využitím týchto rovníc dostávame explicitnú azimutálnu závislosť HBT polomerov

$$R_s^2 = \frac{1}{2} (\langle \tilde{x}^2 \rangle + \langle \tilde{y}^2 \rangle) + \frac{1}{2} (\langle \tilde{y}^2 \rangle - \langle \tilde{x}^2 \rangle) \cos 2\phi - \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle \sin 2\phi \quad (6.2a)$$

$$R_o^2 = \frac{1}{2} (\langle \tilde{x}^2 \rangle + \langle \tilde{y}^2 \rangle) - \frac{1}{2} (\langle \tilde{y}^2 \rangle - \langle \tilde{x}^2 \rangle) \cos 2\phi + \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle \sin 2\phi \\ + \beta_o^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle - 2\beta_o \langle \tilde{x}\tilde{t} \rangle \cos \phi - 2\beta_o \langle \tilde{y}\tilde{t} \rangle \sin \phi \quad (6.2b)$$

$$R_i^2 = \langle (\tilde{z} - \beta_i \tilde{t})^2 \rangle \quad (6.2c)$$

$$R_{os}^2 = \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle \cos 2\phi + \frac{1}{2} (\langle \tilde{y}^2 \rangle - \langle \tilde{x}^2 \rangle) \sin 2\phi + \beta_o \langle \tilde{x}\tilde{t} \rangle \sin \phi - \beta_o \langle \tilde{y}\tilde{t} \rangle \cos \phi \quad (6.2d)$$

$$R_{ol}^2 = \langle (\tilde{z} - \beta_l \tilde{t}) \tilde{x} \rangle \cos \phi + \langle (\tilde{z} - \beta_l \tilde{t}) \tilde{y} \rangle \sin \phi - \beta_l \langle (\tilde{z} - \beta_l \tilde{t}) \tilde{t} \rangle \quad (6.2e)$$

$$R_{sl}^2 = \langle (\tilde{z} - \beta_l \tilde{t}) \tilde{y} \rangle \cos \phi - \langle (\tilde{z} - \beta_l \tilde{t}) \tilde{x} \rangle \sin \phi. \quad (6.2f)$$

HBT polomery majú aj implicitnú azimutálnu závislosť, ktorú určíme pomocou Fourierovho rozvoja variancií a kovariancií typu $\langle \tilde{x}_i \tilde{x}_j \rangle$.

6.1 Fourierov rozvoj HBT polomerov

Ako každú periodickú závislosť môžeme aj HBT polomery rozvinúť do Fourierových radov a sledovať závislosti jednotlivých koeficientov. Vo všeobecnosti tak budú mať korelačné polomery tvar

$$R_\mu^2 = (R_\mu^2)_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (R_\mu^2)_n^c \cos n\phi + (R_\mu^2)_n^s \sin n\phi. \quad (6.3)$$

Rovnako môžeme rozvinúť stredné hodnoty

$$\langle \tilde{x}_\mu \tilde{x}_\nu \rangle = \langle \tilde{x}_\mu \tilde{x}_\nu \rangle_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{x}_\mu \tilde{x}_\nu \rangle_n^c \cos n\phi + \langle \tilde{x}_\mu \tilde{x}_\nu \rangle_n^s \sin n\phi. \quad (6.4)$$

Dosadením týchto rozvojev do vzťahov (6.2) dostaneme presné vzťahy pre výpočet jednotlivých Fourierových koeficientov HBT polomerov. Ukážku odvodenia vzťahov pre výpočet koeficientov polomerov R_s a R_o možno nájsť v prílohe A.

Numerické výpočty sme ale nerobili pomocou vzťahov z prílohy A. Koeficienty HBT polomerov sme určili preložením krivky vytvorenej všeobecnými Fourierovými koeficientami. Fourierov rad sme si ešte následne upravili do tvaru

$$R_\mu^2 = (R_\mu^2)_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (R_\mu^2)_n \cos(n(\phi - \delta_n)), \quad (6.5)$$

s využitím vzťahov

$$(R_\mu^2)_n = \sqrt{((R_\mu^2)_n^c)^2 + ((R_\mu^2)_n^s)^2} \quad (6.6a)$$

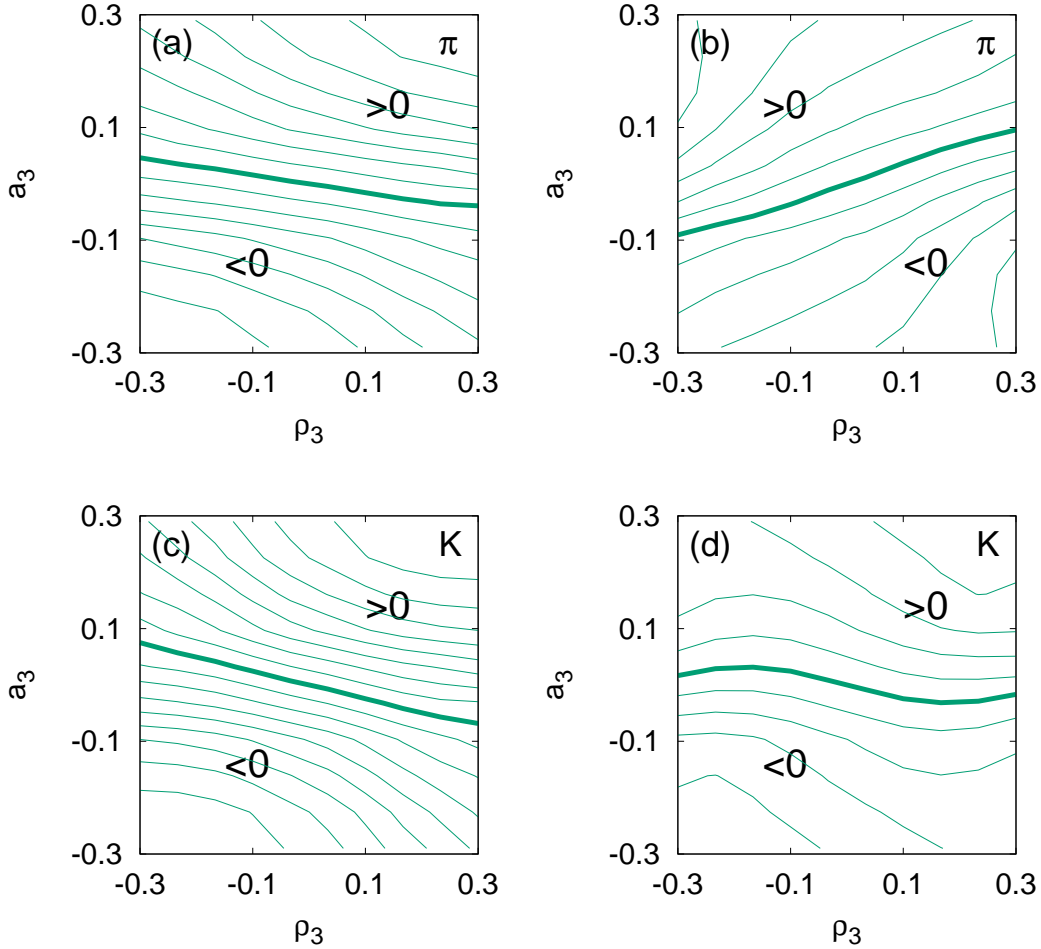
$$\delta_n = \frac{1}{n} \arctan \left(-\frac{(R_\mu^2)_n^s}{(R_\mu^2)_n^c} \right). \quad (6.6b)$$

Po tejto úprave už nič nebránilo tomu, aby sme si mohli vypočítať relatívnu veľkosť Fourierových koeficientov tretieho rádu $(R_\mu^2)_3/(R_\mu^2)_0$. Tie závisia od parametrov a_3 a ρ_3 . Keďže sa jedná o trojrozmerný graf, opäť si necháme vykresliť iba vrstevnice odpovedajúce relatívnej veľkosti koeficientov tretieho rádu HBT polomerov R_o^2 a R_s^2 . Výsledné grafy sú na obr. 6.1.

Rovnako ako v prípade Fourierovho rozvoja spektra sa aj tu zameriavame na relatívne Fourierove koeficienty. Je to preto, lebo veľkosť HBT polomerov je priamo úmerná veľkosti horúcej hmoty. Keď zväčšíme polomer horúcej hmoty R_0 dvojnásobne, zväčšia sa dvojnásobne aj HBT polomery vrátane ich anizotropií. Táto závislosť je však triviálna a zbavíme sa jej práve počítaním relatívnych koeficientov.

Výpočtom sme navyše zistili, že priestorová a expanzná anizotropia tretieho rádu automaticky vytvárajú aj viditeľnú anizotropiu šiesteho rádu v HBT polomeroch. Tá je znázornená na obr. 6.2. Na tomto grafe si tiež môžeme všimnúť, že anizotropia šiesteho rádu je približne 10-krát menšia, než anizotropia tretieho rádu.

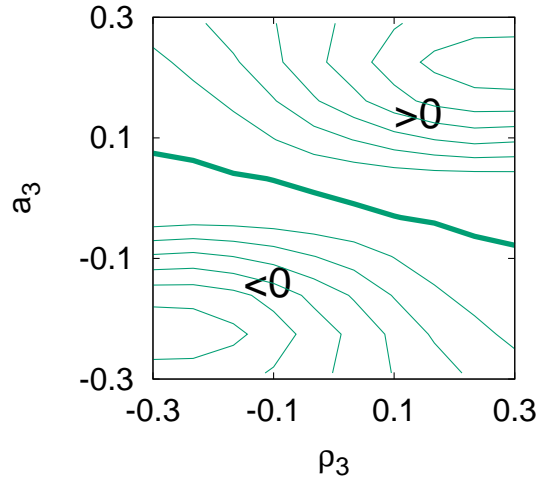
Spolu s vrstevnicovými grafmi koeficientov v_2 a v_3 tak máme teraz možnosť presne určiť všetky parametre anizotropie horúcej hmoty meraním hybnostného spektra a HBT polomerov. Stačí preložiť dané vrstevnicové grafy cez seba a vyznačiť namerané hodnoty koeficientov Fourierovho rozvoja. Ako príklad je uvedené hľadanie počiatočných parametrov anizotropie horúcej hmoty tretieho rádu meraním spektra a polomeru R_o^2 . Preloženie grafov cez seba je znázornené na obrázku 6.3.



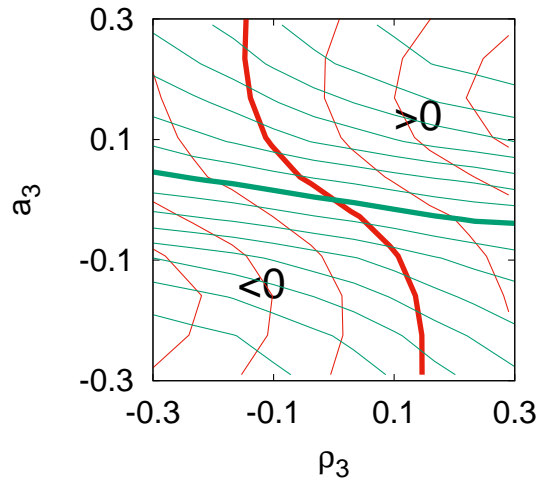
Obr. 6.1: Vrstevnivé grafy relatívnych Fourierových koeficientov tretieho rádu. Na obrázkoch sú znázornené vrstevnivé grafy závislostí relatívnych koeficientov $(R_o^2)_3/(R_o^2)_0$ a $(R_s^2)_3/(R_s^2)_0$ od parametrov anizotropie tretieho rádu. Na obrázkoch (a) a (c) sú vrstevnivé grafy $(R_o^2)_3/(R_o^2)_0$, na obrázkoch (b) a (d) zase $(R_s^2)_3/(R_s^2)_0$. Hrubá čiara znázorňuje nulovú vrstevnicu, tenké čiary znázorňujú nárast (resp. pokles) o 0,05. Grafy sú kreslené pre parametre $\tau_0 = 10\text{fm}/c$, $R = 7\text{fm}$, $T = 120\text{MeV}$, $\rho_0 = 0,8$ a $K_o = 500\text{MeV}$.

6.2 Porovnanie s experimentálnymi výsledkami

S touto metódou sme teraz schopní analyzovať reálne dáta a určiť parametre anizotropií horúcej hmoty, ktorá pri experimentoch vzniká. Na precíznu analýzu dát by sme však potrebovali viac času, preto tu uvedieme len krátku ukážku toho, ako by sme mohli z dát určiť parametre anizotropií. Pozreli sme sa preto na dáta zo zrážok jadier zlata pri $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{GeV}$. Druhý rád anizotropií už bol pre model tlakovej vlny porovnaný s experimentálnymi hodnotami z detektoru STAR a navyše boli tieto dáta aj korektne nafitované [9]. My sme sa pozreli na hodnoty anizotropií tretieho rádu namerané na detektore PHENIX [10, 11], ktorý je súčasťou urýchľovača RHIC.



Obr. 6.2: Vrstevniový graf anizotropie R_o^2 šiesteho rádu. Na obrázku je znázornený vrstevniový graf závislosti relatívneho Fourieroveho koeficientu $(R_o^2)_6/(R_o^2)_0$ pre kaóny. Hrubá čiara znázorňuje nulovú vrstevnicu, tenké čiary znázorňujú nárast (resp. pokles) o 0,005. Grafy sú kreslené pre parametre $\tau_0 = 10\text{fm}/c$, $R = 7\text{fm}$, $T = 120\text{MeV}$, $\rho_0 = 0,8$ a $K_o = 500\text{MeV}$.

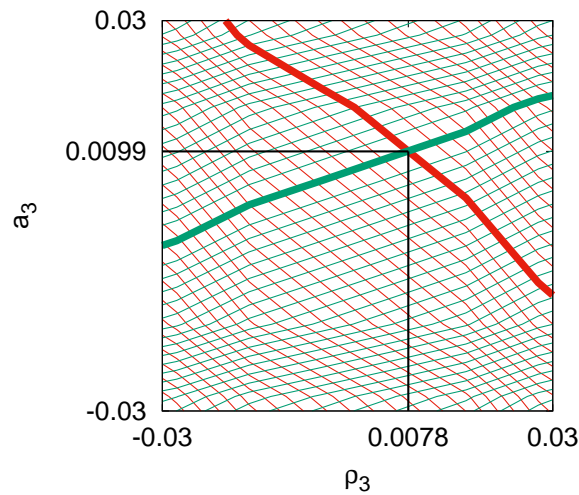


Obr. 6.3: Prekrytie vrstevniových grafov závislostí v_3 a $(R_o^2)_3/(R_o^2)_0$ pre pióny. Zelenou farbou sú znázornené vrstevnice koeficientu $(R_o^2)_3/(R_o^2)_0$ a červenou čiarou vrstevnice koeficientu v_3 . Hrubé čiary znázorňujú nulovú vrstevnicu, tenké čiary znázorňujú nárast (resp. pokles) o 0,05. Grafy sú kreslené pre parametre $\tau_0 = 10\text{ fm}/c$, $R = 7\text{ fm}$, $T = 120\text{ MeV}$, $\rho_0 = 0,8$ a $p_t = K_o = 500\text{ MeV}$.

Z nafitovaných dát pre druhý rád sme si zafixovali parametre, ktoré sme ďalej používali pri numerických výpočtoch. Zobrali sme parametre pre centralitu 10 – 20%, ktoré sú $T = 98\text{ MeV}$, $\rho_0 = 0,98$, $\rho_2 = 0,05$, $\tau_0 = 7,8\text{ fm}/c$, $\Delta\tau = 2,59\text{ fm}/c$ a $a_2 = 0,0439$.

Ďalej sme určili parametre anizotropií tretieho rádu. Na určenie týchto parametrov sme si vykreslili vrstevnicové grafy relatívnych koeficientov v_3 a $(R_s^2)_3/(R_s^2)_0$ pre pióny, ktoré sme cez seba prekryli. Experimentálne určené v_3 a R_s sú merané pre rôzne hybnosti. Preto sme z nich vybrali hybnosti, ktoré boli najbližšie pri sebe. Z dát pre v_3 je to hybnosť $p_t = 863$ MeV a z dát pre $(R_s^2)_3/(R_s^2)_0$ je to hybnosť $K_o = 877$ MeV. Vrstevnicové grafy sme tak vykreslili pre hybnosť 870 MeV. Tieto dáta sme preto považovali pre túto ukážku ako smerodajné. Vrstevnicové grafy sa s parametrom R_0 nemenia, preto tento parameter môžeme určiť neskôr.

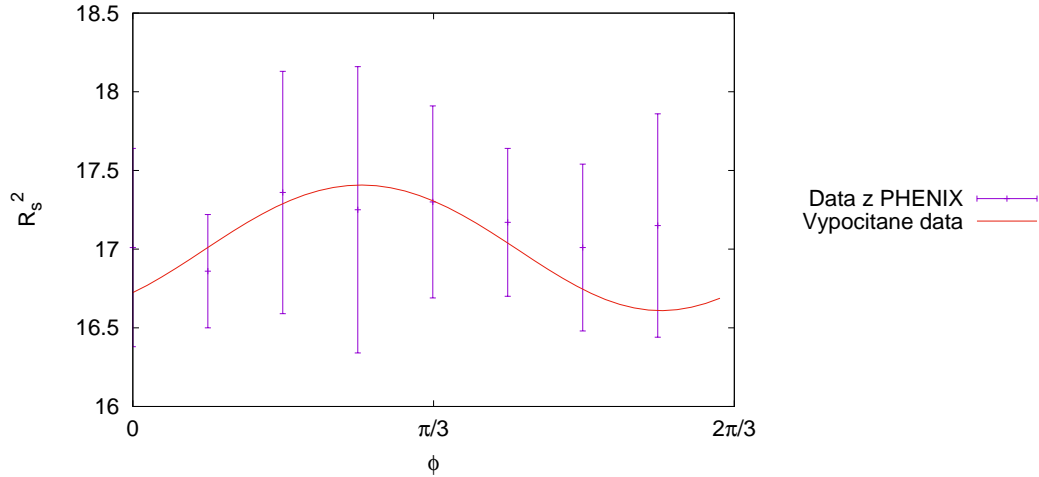
Na grafe 6.4 sme vyznačili hrubou čiarou vrstevnice vyjadrujúce namerané dáta. Z prekryvu grafov sme určili hodnoty parametrov anizotropií tretieho rádu, ktoré sú $a_3 = 0,0099$ a $\rho_3 = 0,0078$.



Obr. 6.4: Prekrytie vrstevnicových grafov s vyznačeným bodom, ktorý prislúcha experimentálnym dátam. Na obrázku je vykreslené prekrytie vrstevnicového grafu koeficientu v_3 (červené vrstevnice) a vrstevnicového grafu koeficientu $(R_s^2)_3/(R_s^2)_0$ (zelené vrstevnice) pre pióny, na ktorom sú hrubými čiarami vyznačené hodnoty namerané na detektore PHENIX [10, 11]. Graf je nakreslený pre parametre $T = 98$ MeV, $\rho_0 = 0,98$, $\rho_2 = 0,05$, $\tau_0 = 7,8$ fm/c, $\Delta\tau = 2,59$ fm/c a $a_2 = 0,0439$.

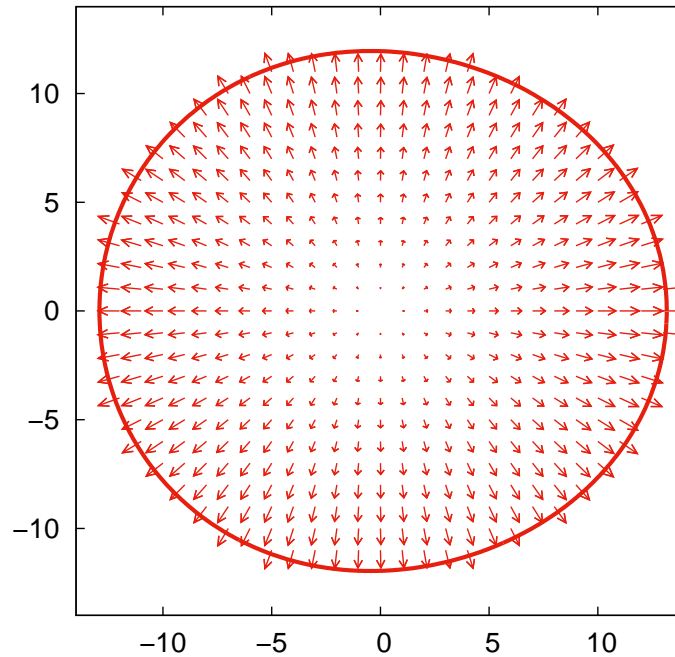
Ako ďalší sme určili parameter R_0 , a to porovnaním nameranej závislosti $R_s^2(\phi)$ s vypočítanou. Všetky ostatné parametre sme zafixovali a menili sme iba R_0 , dokým vypočítaná krivka nevyzerala byť dosť blízko nameraným hodnotám. Takto sme získali hodnotu $R_0 = 12,5$ fm. Porovnanie nameraných dát s vypočítanými je zobrazené na obrázku 6.5. Je zaujímavé všimnúť si, že fáza anizotropie tretieho rádu na nameraných dátach nie je nulová. Tento efekt môže byť spôsobený kombináciou anizotropií druhého a tretieho rádu.

Keď už sme určili všetky parametre popisujúce horúcu hmotu pre jednu nameranú hybnosť, pozreli sme sa, ako sa vypočítané závislosti $v_3(p_t)$ a $(R_s^2)_3/(R_s^2)_0(K_o)$ pri-

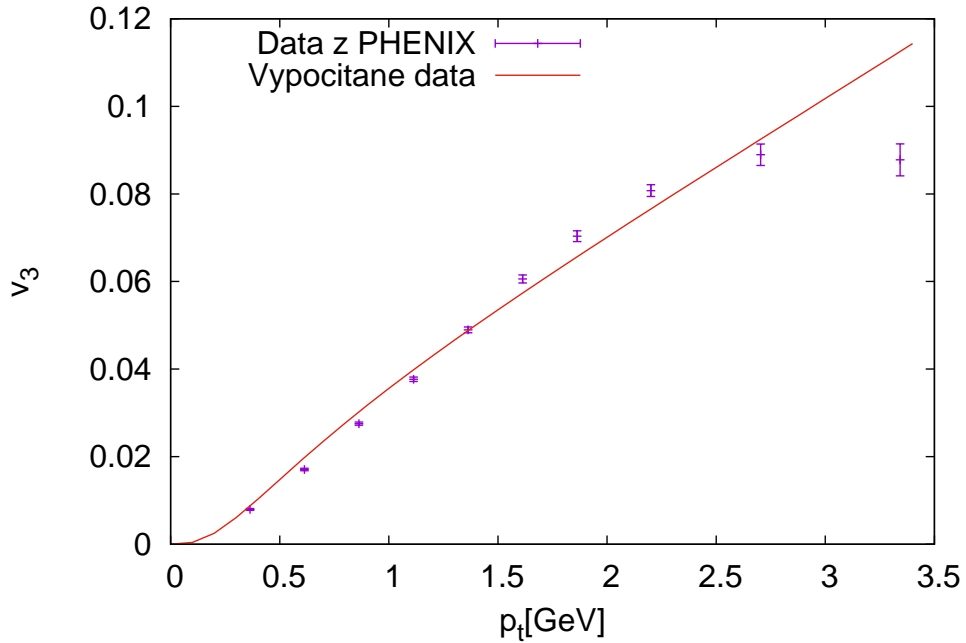
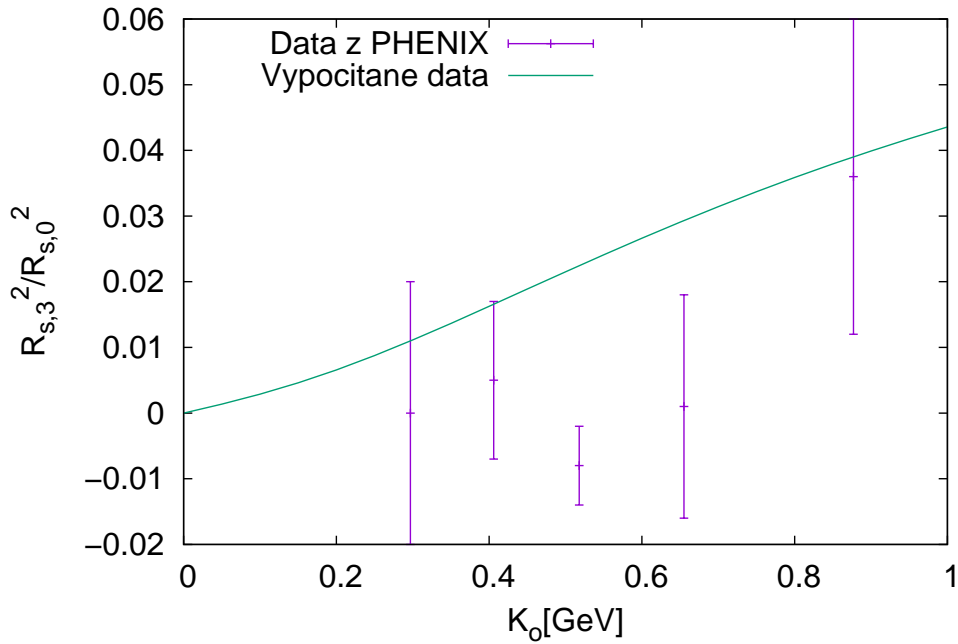


Obr. 6.5: Porovnanie nameraných a vypočítaných dát závislosti $R_s^2(\phi)$. Graf je nakreslený pre parametre $T = 98$ MeV, $\rho_0 = 0,98$, $\tau_0 = 7,8$ fm/c, $\Delta\tau = 2,59$ fm/c, $\theta_3 = \frac{\pi}{4}$, $a_3 = 0,0099$ a $\rho_3 = 0,0078$.

bližujú k tým nameraným. Tieto porovnania sú vykreslené na obrázku 6.7. Nakoniec sme vykreslili, ako vyzeralo rýchlostné pole horúcej hmoty, ktorá pri daných zrážkach vznikla. Výsledok je na obrázku 6.6.



Obr. 6.6: Rýchlostné pole horúcej hmoty odpovedajúce experimentálnym dátam. Obrázok je kreslený pre určené parametre $\rho_0 = 0,98$, $\rho_2 = 0,05$, $a_2 = 0,0439$, $R_0 = 12,5$ fm, $a_3 = 0,0099$ a $\rho_3 = 0,0078$.

(a) Graf závislosti v_3 od p_t pre namerané a vypočítané dáta.(b) Graf závislosti $(R_s^2)_3/(R_s^2)_0$ od K_o pre namerané a vypočítané dáta.

Obr. 6.7: Závislosti koeficientov anizotropií od priečnej hybnosti pre namerané dáta a vypočítané dáta. Obrázky sú kreslené pre parametre $T = 98$ MeV, $\rho_0 = 0,98$, $\rho_2 = 0,05$, $\tau_0 = 7,8$ fm/c, $\Delta\tau = 2,59$ fm/c, $a_2 = 0,0439$, $R_0 = 12,5$ fm, $p_t = K_o = 870$ MeV, $a_3 = 0,0099$ a $\rho_3 = 0,0078$.

Záver

V našej práci sa nám podarili dosiahnuť stanovené ciele. Po prvýkrát je tu rozvinutý model tlakovej vlny pre kvarkovo-gluónovú plazmu do tretieho rádu anizotropií. Dokázali sme parametrizovať priestorovú aj expanznú anizotropiu a pomocou emisnej funkcie nasimulovať hybnostné spektrum. Rozvinutím spektra do Fourierovho radu a výpočtom jeho koeficientov sme prišli na to, že meranie anizotropie spektra nie je dostačujúce na určenie parametrov anizotropií horúcej hmoty, pretože tu je stále jeden stupeň voľnosti. To je najdôležitejším záverom tejto práce.

Ako ďalšiu sme tak počítali koreláciu identických častíc. Aproximáciou korelačnej funkcie Gaussovou funkciou sme dostali korelačné polomery. Tie sa nám opäť podarilo rozvinúť do Fourierových radov a nasimulovať, ako vyzerajú ich koeficienty. Z obidvoch rozvojev sme vytvorili závislosti od parametrov priestorovej a expanznej anizotropie. Keďže sa jedná o trojrozmerné grafy, vykreslili sme z nich iba vrstevnice. Prekrytím dvoch nezávislých vrstevnicových grafov sme dostali spôsob, akým určiť parametre anizotropií meraním hybnostného spektra a korelačných polomerov.

Naše simulované výsledky sme porovnali s experimentálnymi dátami nameranými na urýchľovači RHIC. Z ich publikovaných výsledkov sme vybrali jednu ukážkovú hybnosť, pre ktorú sme nasimulovali dáta a použili našu metódu na určenie parametrov anizotropií. Z týchto dát sme tak získali obraz rýchlostného poľa horúcej hmoty pri experimente. Simulované dáta sme chceli porovnať aj s dátami z najväčšieho urýchľovača v CERN-e. Zatiaľ ale nie sú publikované výsledky pre korelačné polomery s rozvojom do tretieho rádu.

Výhoda našej metódy parametrizácie anizotropií spočíva v tom, že je veľmi jednoduché rozšíriť model aj o vyššie rády, a to vďaka tomu, že priestorovú aj expanznú anizotropiu sme si parametrizovali Fourierovým radom. Navyše s našou metódou určovania anizotropií pomocou prekrytia vrstevnicových grafov sme schopní teoreticky určiť všetky rády anizotropií, ktoré horúca hmota môže mať.

Ďalším zaujímavým záverom našej práce je zistenie, že keď do modelu vložíme anizotropiu, v spektre a v korelačných polomeroch vzniknú aj anizotropie vyšších rádov. To značne komplikuje predchádzajúce tvrdenie, nakoľko anizotropia štvrtého rádu nebude závisieť iba od parametrov anizotropií štvrtého, ale aj druhého rádu. Na vykreslenie jej závislostí by sme tak potrebovali o 2 rozmery viac. Presné riešenie tohoto problému

tak ostáva otvorené. Naším spôsobom však napriek tomu vieme dostať aspoň približné riešenie, nakoľko sme zistili, že generovaná anizotropia je približne 10-krát menšia ako tá, z ktorej je vygenerovaná. Očakávame pritom kvadratickú závislosť medzi týmito anizotropiami, čo je splnené, keďže anizotropia tretieho rádu sa pohybuje v okolí 0,1 a šiesteho rádu v okolí 0,01.

Naša práca je tak momentálne schopná spracovávať namerané dáta a určovať z nich parametre anizotropií. Z týchto anizotropií možno ďalej určiť rozdelenie tlaku v horúcej hmote a tiež opísať dynamiku jej rozpínania. To je už však za hranicami tejto práce.

Literatúra

- [1] FLORKOWSKI, Wojciech. *Phenomenology of Ultra-Relativistic Heavy-Ion Collisions*. World Scientific, 2010. ISBN 978-981-4280-66-2.
- [2] TOMÁŠIK, Boris. *Disentangling spatial and flow anisotropy*. Acta Physica Polonica B. 2005, roč. 36, s. 2087-2104.
- [3] CSANÁD, Máté a Boris TOMÁŠIK a Tamás CSÖRGŐ. *Interplay among the azimuthally dependent HBT radii and the elliptic flow*. In: European Physical Journal A. 2008, roč. 37, s. 111-119.
- [4] WIEDEMANN, Urs Achim a Boris TOMÁŠIK. *Central and Non-central HBT from AGS to RHIC*. In: Quark-gluon plasma 3. World Scientific, 2003, ISBN 978-981-238-077-7.
- [5] HEINZ, Ulrich, et al. *Symmetry constraints for the emission angle dependence of Hanbury Brown-Twiss radii*. In: Physical Review C, 2002, roč. 66.
- [6] HEINZ, Ulrich. *Quark-gluon soup - The perfectly liquid phase of QCD*. In: International Journal of Modern Physics A. World Scientific, 2015, ISSN 0217-751X.
- [7] ADAMS, Joshua, et al. *Azimuthally Sensitive Hanbury Brown-Twiss Interferometry in Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV*. In: Physical Review Letters. 2004, roč. 93.
- [8] COOPER, Fred a Graham FRYE. *Comment on the Single Particle Distribution in the Hydrodynamic and Statistical Thermodynamic Models of Multiparticle Production*. In: Physical Review D. 1974, roč. 10.
- [9] ADAMS, Joshua, et al. *Pion interferometry in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV*. In: Physical Review C. 2005, roč. 71.
- [10] ADARE, Andrew, et al. *Azimuthal-Angle Dependence of Charged-Pion-Interferometry Measurements with Respect to Second- and Third-Order Event Planes in Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV*. In: Physical Review Letters. 2014, roč. 112.

- [11] ADARE, Andrew, et al. *Measurements of Higher-Order Flow Harmonics in Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV* [online]. ArXiv, 2011. Updated 2011-05-19. Dostupné na: <http://arxiv.org/pdf/1105.3928v1.pdf>.

Príloha A

Našou úlohou je v tejto prílohe vypočítať Fourierove koeficienty HBT polomeru R_s^2 . Po dosadení Fourierových rozvojev stredných hodnôt do rovnice (6.2a) dostávame

$$\begin{aligned}
 R_s^2 = & \frac{1}{2} \left(\langle \tilde{x}^2 \rangle_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_n^c \cos n\phi + \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_n^s \sin n\phi + \langle \tilde{y}^2 \rangle_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_n^c \cos n\phi \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_n^s \sin n\phi \right) + \frac{1}{2} \left[\langle \tilde{y}^2 \rangle_0 \cos 2\phi + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_n^c \left(\cos(n+2)\phi + \cos(n-2)\phi \right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_n^s \left(\sin(n-2)\phi + \sin(n+2)\phi \right) - \langle \tilde{x}^2 \rangle_0 \cos 2\phi - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_n^c \right. \\
 & \left. \times \left(\cos(n+2)\phi + \cos(n-2)\phi \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_n^s \left(\sin(n-2)\phi + \sin(n+2)\phi \right) \right] \\
 & - \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_0 \sin 2\phi - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_n^c \left(\sin(n+2)\phi - \sin(n-2)\phi \right) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_n^s \\
 & \times \left(\cos(n-2)\phi - \cos(n+2)\phi \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_s^2 = & \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_1^c \cos \phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_2^c \cos 2\phi + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_n^c \cos n\phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_1^s \sin \phi \\
 & + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_2^s \sin 2\phi + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_n^s \sin n\phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_1^c \cos \phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_2^c \cos 2\phi \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_n^c \cos n\phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_1^s \sin \phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_2^s \sin 2\phi + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_n^s \sin n\phi \\
 & + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_0 \cos 2\phi + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n-2}^c \cos n\phi + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_1^c \cos \phi + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_2^c + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_3^c \cos \phi \\
 & + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_4^c \cos 2\phi + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n+2}^c \cos n\phi - \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_1^s \sin \phi + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_3^s \sin \phi \\
 & + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_4^s \sin 2\phi + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n+2}^s \sin n\phi + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n-2}^s \sin n\phi - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_0 \cos 2\phi \\
 & - \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n-2}^c \cos n\phi - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_1^c \cos \phi - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_2^c - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_3^c \cos \phi - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_4^c \cos 2\phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n+2}^c \cos n\phi + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_1^s \sin \phi - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_3^s \sin \phi - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_4^s \sin 2\phi \\
& -\frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n+2}^s \sin n\phi - \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n-2}^s \sin n\phi - \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_0 \sin 2\phi - \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n-2}^c \sin n\phi \\
& -\frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_1^c \sin \phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_3^c \sin \phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_4^c \sin 2\phi + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n+2}^c \sin n\phi \\
& -\frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_1^s \cos \phi - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_2^s - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_3^s \cos \phi - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_4^s \cos 2\phi - \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n+2}^s \cos n\phi \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n-2}^s \cos n\phi.
\end{aligned}$$

Porovnaním tejto rovnice s Fourierovým rozvojom v rovnici (6.3) získame hľadané koeficienty

$$(R_s^2)_0 = \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_0 + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_2^c - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_2^c - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_2^s \quad (6.7a)$$

$$(R_s^2)_1^c = \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_1^c + \frac{3}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_1^c + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_3^c - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_3^c - \frac{1}{2} (\langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_1^s - \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_3^s) \quad (6.7b)$$

$$(R_s^2)_1^s = \frac{3}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_1^s + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_1^s + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_3^s - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_3^s - \frac{1}{2} (\langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_1^c - \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_3^c) \quad (6.7c)$$

$$(R_s^2)_2^c = \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_2^c + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_2^c + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_0 + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_4^c - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_0 - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_4^c - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_4^s \quad (6.7d)$$

$$(R_s^2)_2^s = \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_2^s + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_2^s + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_4^s - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_4^s - \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_4^c \quad (6.7e)$$

$$\begin{aligned}
(R_s^2)_n^c &= \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_n^c + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_n^c + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n-2}^c + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n+2}^c - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n-2}^c - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n+2}^c \\
& - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n+2}^s + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n-2}^s \quad (6.7f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_s^2)_n^s &= \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_n^s + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_n^s + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n-2}^s + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n+2}^s - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n-2}^s - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n+2}^s \\
& - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n-2}^c + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n+2}^c. \quad (6.7g)
\end{aligned}$$

Tieto rovnice nám dávajú istú informáciu o koeficientoch Fourierovho rozvoja. Keďže vieme, že sínusové členy Fourierovho radu spôsobujú fázový posun daného rádu anizotropie, vieme identifikovať, čím je tento posun spôsobený. Analogicky sme vypočítali aj koeficienty Fourierovho rozvoja polomeru R_o

$$\begin{aligned}
R_o^2 &= \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_1^c \cos \phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_2^c \cos 2\phi + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_n^c \cos n\phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_1^s \sin \phi \\
& + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_2^s \sin 2\phi + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_n^s \sin n\phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_1^c \cos \phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_2^c \cos 2\phi \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_n^c \cos n\phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_1^s \sin \phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_2^s \sin 2\phi + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_n^s \sin n\phi \\
& - \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_0 \cos 2\phi - \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n-2}^c \cos n\phi - \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_1^c \cos \phi - \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_2^c - \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_3^c \cos \phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_4^c \cos 2\phi - \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n+2}^c \cos n\phi + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_1^s \sin \phi - \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_3^s \sin \phi \\
& -\frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_4^s \sin 2\phi - \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n+2}^s \sin n\phi - \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n-2}^s \sin n\phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_0 \cos 2\phi \\
& + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n-2}^c \cos n\phi + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_1^c \cos \phi + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_2^c + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_3^c \cos \phi + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_4^c \cos 2\phi \\
& + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n+2}^c \cos n\phi - \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_1^s \sin \phi + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_3^s \sin \phi + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_4^s \sin 2\phi \\
& + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n+2}^s \sin n\phi + \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n-2}^s \sin n\phi + \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_0 \sin 2\phi + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n-2}^c \sin n\phi \\
& + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_1^c \sin \phi - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_3^c \sin \phi - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_4^c \sin 2\phi - \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n+2}^c \sin n\phi \\
& + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_1^s \cos \phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_2^s + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_3^s \cos \phi + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_4^s \cos 2\phi + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n+2}^s \cos n\phi \\
& - \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n-2}^s \cos n\phi + \beta_o^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle_0 + \beta_o^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle_1^c \cos \phi + \beta_o^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle_2^c \cos 2\phi + \beta_o^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle_1^s \sin \phi \\
& + \beta_o^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle_2^s \sin 2\phi + \beta_o^2 \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{t}^2 \rangle_n^c \cos n\phi + \beta_o^2 \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{t}^2 \rangle_n^s \sin n\phi - 2\beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_0 \cos \phi \\
& - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_1^c - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_2^c \cos \phi - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_3^c \cos 2\phi - \beta_o \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_{n-1}^c \cos n\phi - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_1^c \cos 2\phi \\
& - \beta_o \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_{n+1}^c \cos n\phi - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_2^s \sin \phi - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_3^s \sin 2\phi - \beta_o \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_{n-1}^s \sin n\phi \\
& - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_1^s \sin 2\phi - \beta_o \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_{n+1}^s \sin n\phi - 2\beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_0 \sin \phi - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_1^s \\
& - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_2^s \cos \phi - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_3^s \cos 2\phi - \beta_o \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_{n+1}^s \cos n\phi + \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_1^s \cos 2\phi \\
& + \beta_o \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_{n-1}^s \cos n\phi + \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_2^c \sin \phi + \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_3^c \sin 2\phi + \beta_o \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_{n+1}^c \sin n\phi \\
& - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_1^c \sin 2\phi - \beta_o \sum_{n=3}^{\infty} \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_{n-1}^c \sin n\phi.
\end{aligned}$$

Porovnaním tejto rovnice s Fourierovým rozvojom v rovnici (6.3) opäť získame hľadané koeficienty

$$\begin{aligned}
(R_o^2)_0 &= \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_0 + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_0 - \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_2^c + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_2^c + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_2^s + \beta_o^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle_0 - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_1^c \\
& - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_1^s
\end{aligned} \tag{6.8a}$$

$$\begin{aligned}
(R_o^2)_1^c &= \frac{3}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_1^c + \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_1^c - \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_3^c + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_3^c + \frac{1}{2} (\langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_1^s - \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_3^s) + \beta_o^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle_1^c \\
& - 2\beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_0 - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_2^c - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_2^s
\end{aligned} \tag{6.8b}$$

$$(R_o^2)_1^s = \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_1^s + \frac{3}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_1^s - \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_3^s + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_3^s + \frac{1}{2} (\langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_1^c - \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_3^c) + \beta_o^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle_1^s - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_2^s - 2\beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_0 + \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_2^c \quad (6.8c)$$

$$(R_o^2)_2^c = \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_2^c + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_2^c - \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_0 - \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_4^c + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_0 + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_4^c + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_4^s + \beta_o^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle_2^c - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_3^c - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_1^c - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_3^s + \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_1^s \quad (6.8d)$$

$$(R_o^2)_2^s = \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_2^s + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_2^s - \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_4^s + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_4^s + \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_0 - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_4^c + \beta_o^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle_2^s - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_3^s - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_1^s - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_1^c + \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_3^c \quad (6.8e)$$

$$(R_o^2)_n^c = \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_n^c + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_n^c - \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n-2}^c - \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n+2}^c + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n-2}^c + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n+2}^c + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n+2}^s - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n-2}^s + \beta_o^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle_n^c - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_{n-1}^c - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_{n+1}^c - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_{n+1}^s + \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_{n-1}^s \quad (6.8f)$$

$$(R_o^2)_n^s = \frac{1}{2} \langle \tilde{x}^2 \rangle_n^s + \frac{1}{2} \langle \tilde{y}^2 \rangle_n^s - \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n-2}^s - \frac{1}{4} \langle \tilde{y}^2 \rangle_{n+2}^s + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n-2}^s + \frac{1}{4} \langle \tilde{x}^2 \rangle_{n+2}^s + \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n-2}^c - \frac{1}{2} \langle \tilde{x}\tilde{y} \rangle_{n+2}^c + \beta_o^2 \langle \tilde{t}^2 \rangle_n^s - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_{n-1}^s - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{x} \rangle_{n+1}^s - \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_{n-1}^c + \beta_o \langle \tilde{t}\tilde{y} \rangle_{n+1}^c \quad (6.8g)$$