

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky

Triedenie udalostí podľa tvaru očami femtoskopie

9. Česko-Slovenská študentská vedecká konferencia vo fyzike

Bc. Jakub Cimerman

Vedúci práce: Doc. Dr. Boris Tomášik

Praha, 2018

Prehlásenie

Prehlasujem, že som túto prácu vypracoval samostatne a použil som iba podklady (literatúru, projekty, SW atď) uvedené v priloženom zozname.

Nemám závažný dôvod proti použitiu tohoto diela v zmysle § 60 Zákona č. 121/200 Sb., o práve autorskom, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonov (autorský zákon).

V Prahe dňa

.....

podpis

Názov práce:

Triedenie udalostí podľa tvaru očami femtoskopie

Autor: Bc. Jakub Cimerman

Abstrakt: Už niekoľko desiatok rokov skúmajú vedci vo svetových laboratóriách zrážky atómových jadier pri vysokých energiách. Jedným z ich cieľov je skúmanie kvarkovo-gluónovej plazmy, ktorá pri týchto zrážkach vzniká. Po zrážke sa plazma postupne mení na plyn hadrónov nazývaný horúca hmota. Táto horúca hmota však nie je homogénna a expanduje nerovnomerne kvôli nehomogenitám v počiatočnom rozdelení hustoty energie. To má za následok merateľnú anizotropiu produkcie hadrónov. Anizotropia horúcej hmoty môže byť priestorová alebo expanzná. Okrem samotného spektra anizotropia ovplyvňuje aj dvojčasticové korelácie v relatívnej hybnosti. Korelačné polomery preto tiež vykazujú anizotropiu.

V tejto práci sme sa zamerali na korelačné polomery simulovaných udalostí. Pomocou niekoľkých generátorov udalostí sme nasimulovali množstvo zrážok. Udalosti sme zoradili podľa podobnosti ich tvaru a roztriedili sme ich do malých tried, v ktorých sú si udalosti navzájom podobné. Následne sme vygenerovali korelačné funkcie pre každú z tried a ich nafiťovaním sme určili azimutálnu závislosť korelačných polomerov. S využitím tejto metódy sme schopní pozorovať anizotropie druhého a tretieho rádu súčasne. Navyše môžeme vidieť, ako sa mení tvar udalostí a oblasť homogenity medzi jednotlivými triedami.

Kľúčové slová: Kvark-gluónová plazma, Blast-wave model, korelačná femtoskopia, ustreďovanie udalostí, triedenie udalostí podľa tvaru

Obsah

Úvod	1
1 Horúca hmota	2
1.1 Voľba súradníc	2
1.2 Smer expanzie	3
1.3 Emisná funkcia	5
2 Korelačná femtoskopia	7
2.1 Korelačná funkcia	7
2.2 HBT polomery	9
3 Simulácia produkcie častíc	11
3.1 Generátory udalostí	11
3.1.1 DRAGON	11
3.1.2 AMPT	12
3.2 Počítanie korelačných funkcií	13
3.3 Azimutálna závislosť korelačných polomerov	14
4 Triedenie udalostí podľa tvaru	19
4.1 Algoritmus	20
4.2 Výsledky triedenia	21
5 Korelačná femtoskopia podobných udalostí	26
5.1 Korelačné polomery v jednotlivých triedach	26
5.2 Fourierove koeficienty korelačných polomerov	33
Záver	35
Literatúra	37

Úvod

Pri zrážkach jadier pri najvyšších dosiahnuteľných energiách dochádza ku vzniku kvarkovo-gluónovej plazmy. Tá sa v dôsledku obrovskej hustoty energie postupne rozpína a chladne. Keď jej hustota energie klesne pod určitú hranicu, plazma ako taká prestane existovať, kvarky sa začnú s najbližšími kvarkami okolo seba zhlukovať naspäť do hadrónov a vznikne plyn hadrónov. Tento proces sa nazýva hadronizácia. Horúca hmota sa ďalej rozpína a chladne, až pokým sa hadróny nedostanú z pôsobenia silnej interakcie. Vtedy začnú byť z horúcej hmoty emitované. Tento proces nazývame vymrznutie.

Experimenty ukazujú, že pri zrážkach vznikajú anizotropie v priečnom reze zrážky. Produkcia hadrónov preto závisí od azimutálneho uhla. To dokazuje, že sa v horúcej hmote po zrážke nachádzajú nehomogenity v rozdelení energie. Tie sú dôsledkom najmä necentrálnych zrážok ale tiež rozloženia nukleónov v jadrách. Nehomogenity spôsobujú gradient tlaku v horúcej hmote a teda tiež kolektívny pohyb hmoty.

Ako nástroj na meranie homogénnych oblastí v kvarkovo-gluónovej plazme využívame korelačnú femtoskopiu. Tá dáva do pomeru korelované a nekorelované páry častíc. Výsledkom sú korelačné polomery opisujúce veľkosť oblasti homogenity.

V prvej kapitole tejto práce bližšie vysvetlíme pojmy súvisiace s horúcou hmotou, ako je napr. emisná funkcia. V druhej kapitole vysvetlíme, čo je to korelačná funkcia a ako súvisí s veľkosťou horúcej hmoty. V tretej kapitole opíšeme, aké generátory používame na generovanie udalostí a ukážeme, ako vyzerá azimutálna závislosť korelačných polomerov udalostí natočených rovnakým smerom. V posledných dvoch kapitolách budeme triediť udalosti podľa tvaru a počítat korelačné funkcie z malých tried udalostí, aby sme boli schopní vidieť viac rádoz anizotropií súčasne.

Keďže sa jedná o prácu v oblasti relativity a jadrovej fyziky, budeme v nej používať pre zjednodušenie prirodzenú sústavu jednotiek $c = \hbar = k_B = 1$. V tejto sústave majú hmotnosť, hybnosť, energia a teplota rovnaký fyzikálny rozmer, ktorý budeme uvažovať v jednotkách MeV. Z prirodzenej sústavy jednotiek tiež vyplýva, že čas má rovnaký fyzikálny rozmer ako dĺžka, a obe veličiny budeme počítat v jednotkách fm.

Kapitola 1

Horúca hmota

Pri ultrarelativistických jadrových zrážkach dochádza k fázovému prechodu za vzniku kvarkovo-gluónovej plazmy. Tá postupne chladne, rozpína sa a kvarky sa znovu združujú do hadrónov v procese zvanom hadronizácia. Tento hadrónový plyn nazývame horúca hmota¹.

Z horúcej hmoty sú následne emitované hadróny a tie sú detekované na detektoroch. Rozdelenie hadrónov v koncovom stave je dané emisnou funkciou. Z nej dokážeme vypočítať hybnostné spektrum detekovaných častíc a to porovnávať s experimentálnymi výsledkami. Predtým, než si o emisnej funkcii povieme viac, musíme si zaviesť vhodný súradnicový systém.

1.1 Voľba súradníc

Pri zrážkach častíc je zvykom označovať smer zväzku jadier ako os z . Tento smer nazývame longitudinálny alebo pozdĺžny. Priečny rez zrážky tvorí rovinu kolmú na os z , ktorú nazývame transversálnou (priečnou). V tejto rovine máme definované osy x a y . Niekedy budeme tieto osi značiť pomocou indexov $x_1 = x$, $x_2 = y$ a $x_3 = z$. Predmetom nášho záujmu je anizotropia v priečnej rovine, preto má zmysel zdefinovať si priečnu hybnosť a s ňou súvisiacu priečnu hmotnosť

$$p_t = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \quad (1.1a)$$

$$m_t = \sqrt{m^2 + p_t^2}. \quad (1.1b)$$

Pri ultrarelativistických rýchlostiach je vhodné zdefinovať si veličinu, ktorá opisuje rýchlosť efektívne. Klasická rýchlosť sa totiž v blízkosti jednotky už takmer nemení, pričom energia častice neustále rastie. Veličinou, ktorá pozdĺžnu rýchlosť popisuje lepšie je pozdĺžna rapidita

$$Y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_3}{E - p_3} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + v_3}{1 - v_3} \right). \quad (1.2)$$

¹v angličtine *fireball*

Rapidita má ešte jednu užitočnú vlastnosť, a to že sa pri Lorentzových transformáciách mení iba o konštantu. Pomocou rapidity môžeme napísať štvorvektor hybnosti v tvare

$$p^\mu = (m_t \cosh Y, p_t \cos \phi, p_t \sin \phi, m_t \sinh Y). \quad (1.3)$$

Pri relativistických rýchlostiach dochádza tiež k dilatácii času. Kvôli dilatácii času prebiehajú procesy v oblastiach horúcej hmoty, ktoré sa pohybujú rôznymi rýchlosťami, rôzne rýchlo. Keďže dominantný smer pohybu je pozdĺžny, zavádzame pozdĺžny vlastný čas. V ňom sa udalosti vyvíjajú rovnako rýchlo pre všetky oblasti, ktoré sa pohybujú len v pozdĺžnom smere. Pozdĺžny vlastný čas môžeme zdefinovať spolu s časopriestorovou rapiditou η pomocou súradníc z a t

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2} \quad (1.4a)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t + z}{t - z} \right). \quad (1.4b)$$

Tieto vzťahy sa dajú inverzne prepísať do tvaru

$$z = \tau \sinh \eta \quad (1.5a)$$

$$t = \tau \cosh \eta. \quad (1.5b)$$

Súradnice v priečnej rovine môžeme prepísať pomocou klasických polárnych súradníc. Štvorvektor polohy potom môžeme písať ako

$$x^\mu = (\tau \cosh \eta, r \cos \theta, r \sin \theta, \tau \sinh \eta). \quad (1.6)$$

1.2 Smer expanzie

Pri emisii hadrónov z horúcej hmoty je dôležité uvedomiť si, akým smerom hmota expanduje. Je prirodzené uvažovať, že kolektívny pohyb hmoty je radiálny, teda v smere od stredu horúcej hmoty. V prípade horúcej hmoty bez anizotropií je to jediná rozumná možnosť. Ak ale hmota nemá kruhovo symetrický tvar, vzniká tu aj iná možnosť. Hmota sa môže kolektívne pohybovať v smere kolmom na svoj povrch. V tejto práci budeme uvažovať túto možnosť. Motiváciu nám k tomu dáva to, že pohyb hmoty je spôsobený rozdielnym tlakom a smer tohto pohybu je v smere najväčšieho gradientu tlaku. A ten je práve v smere kolmom na povrch. Navyše dáta namerané na detektore STAR [1] potvrdzujú správnosť tejto úvahy v prípade eliptickej anizotropie [2]. Táto skutočnosť nám do modelu pridáva ďalší uhol, ktorý budeme musieť zohľadniť v našich výpočtoch. Pre lepšiu prehľad budeme uhly označovať nasledovne:

- ϕ je azimutálny uhol, pod ktorým je častica emitovaná. Tento uhol sa preto vyskytuje vo štvorvektore hybnosti.
- θ je azimutálny uhol, pod ktorým sa častica nachádza v momente, kedy bola emitovaná. Z tohto dôvodu sa tento uhol vyskytuje vo štvorvektore polohy.

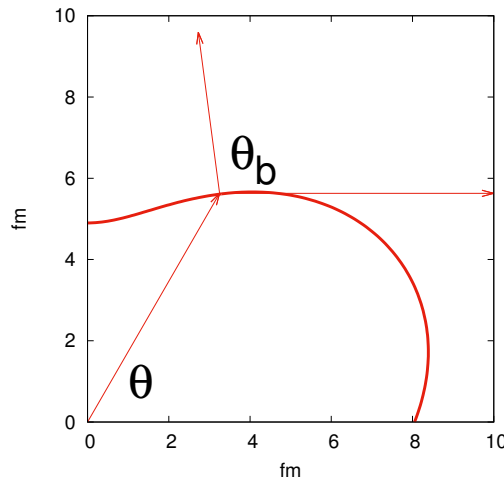
- θ_b je uhol kolmý na plochu horúcej hmoty prislúchajúci miestu na okraji hmoty ležiacom pod uhlom θ (obrázok 1.1).

Uhol θ_b dokážeme vyjadriť ako funkciu uhla θ s využitím derivácií. Derivácia je definovaná ako dotyčnica k funkcii, my ale potrebujeme kolmicu na povrch, takže môžeme napísať

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\theta_b - \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.7)$$

Z tejto rovnice si môžeme vyjadriť hľadaný uhol θ_b , no kým nebudeme mať konkrétnu funkciu opisujúcu tvar horúcej hmoty, musíme sa uspokojiť so všeobecným výrazom

$$\theta_b = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d\theta}{d\theta}}. \quad (1.8)$$



Obr. 1.1: Rozdiel medzi uhlami. Na obrázku je znázornená definícia uhla θ_b a tiež ukážka toho, ako θ_b závisí na θ . Hrubá čiara znázorňuje okraj horúcej hmoty.

Keďže hmota expanduje pod uhlom θ_b , jej priečnu rýchlosť môžeme previesť do polárnych súradníc

$$v_x = v_t \cos \theta_b \quad (1.9a)$$

$$v_y = v_t \sin \theta_b. \quad (1.9b)$$

Priečna rýchlosť bude závislá od vzdialenosti od stredu hmoty. Štvorvektor rýchlosti si môžeme napísať do podobného tvaru ako štvorvektor x vo vzťahu (1.6) pomocou priečnej rapidity ρ ako

$$u^\mu = (\cosh \eta \cosh \rho, \sinh \rho \cos \theta_b, \sinh \rho \sin \theta_b, \cosh \rho \sinh \eta). \quad (1.10)$$

1.3 Emisná funkcia

Ako sme už spomenuli, rozdelenie hadrónov je charakterizované emisnou funkciou, ktorú označujeme $S(x, p)$. Táto funkcia nám udáva nám pravdepodobnosť emisie častice s hybnosťou p v mieste s polohovým štvorvektorom x . Formálne ide o Wignerovu hustotu vo fázovom priestore. Emisná funkcia charakterizuje jednotlivé modely.

Integrovaním emisnej funkcie cez celý objem horúcej hmoty dostaneme všetky emitované hadróny a ich rozdelenie hybností

$$P(p_t, \phi) = \frac{d^3N}{p_t dp_t dY d\phi} = \int S(x, p) d^4x. \quad (1.11)$$

Toto hybnostné spektrum závisí od uhla ϕ . Navyše vieme, že táto závislosť musí byť 2π -periodická. To nám hovorí, že spektrum môžeme rozvinúť do Fourierovho radu

$$P(p_t, \phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2N}{p_t dp_t dY} \Big|_{Y=0} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n(p_t) \cos(n(\phi - \theta_n)) \right). \quad (1.12)$$

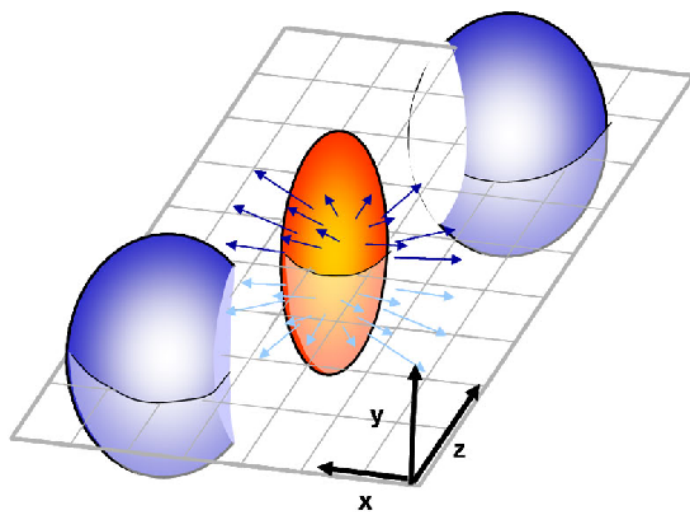
Tu sme sa zamerali iba na častice v strednej rapidite. Koefficienty Fourierovho rozvoja môžeme vo všeobecnosti vyjadriť v tvare

$$v_n(p_t) = \frac{\int_0^{2\pi} P(p_t, \phi) \cos(n(\phi - \theta_n)) d\phi}{\int_0^{2\pi} P(p_t, \phi) d\phi}. \quad (1.13)$$

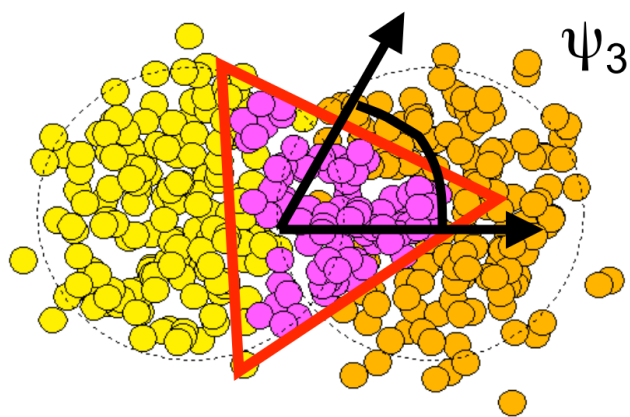
Tieto koefficienty sú experimentálne merateľnou a meranou veličinou, takže nám vytvárajú oblasť, v ktorej môžeme porovnávať experimentálne dáta s teoretickými. Uhly θ_n , ktoré parametrizujú tento Fourierov rozvoj, určujú natočenie n -tej harmonickej zložky vzhľadom na reakčnú rovinu.

Najsilnejšou anizotropiou je anizotropia druhého rádu popísaná koefficientom v_2 . Tá vzniká najmä v dôsledku necentrality zrážok, kedy prierez zrážky tvorí približne elipsu (viď obr. 1.2).

V dnešnej dobe už ale vieme aj o existencii vyšších rádov anizotropií [4]. Tie vznikajú kvôli rôznemu rozdeleniu nukleónov v jadrách a spôsobuje to, že žiadne dve zrážky nemôžu mať úplne rovnaký tvar (viď obr. 1.3). Platí však, že každý ďalší rád je slabší, my sa preto zameriavame na tretí rád anizotropií, nazývaný tiež triangulárna anizotropia.



Obr. 1.2: Ukážka pôvodu anizotropie druhého rádu v necentralite zrážky. Prevzaté z [3]



Obr. 1.3: Ukážka pôvodu anizotropie tretieho rádu v rozložení nukleónov v jadre pred zrážkou. Prevzaté z [5]

Kapitola 2

Korelačná femtoskopia

Ďalším vhodným prostriedkom na meranie vlastností zrážok ťažkých iónov je korelačná (alebo HBT) femtoskopia. Jedná sa o meranie korelácií párov častíc z horúcej hmoty. Táto korelácia je tam kvôli symetrizácii vlnových funkcií a tiež kvôli vzájomnej interkácii bozónov, ktoré letia blízko seba. Z nich sa najčastejšie jedná o pióny. Symetrizácia hrá úlohu najmä keď sú dva pióny blízko seba vo fázovom priestore, teda platí $\Delta p \Delta x \sim \hbar$. Meraním korelácie môžeme skúmať štruktúru horúcej hmoty na úrovni femtometrov. V tejto práci sa obmedzíme na korelácie párov identických bozónov.

Túto metódu vymysleli na meranie uhlovej veľkosti rádioastronomických zdrojov v 50-tych rokoch Robert Hanbury Brown a Richard Q. Twiss. Medzi ich metódou a korelačnou femtoskopiou v časticovej fyzike existuje analógia, preto sa korelačné polomery niekedy označujú aj ako HBT polomery.

2.1 Korelačná funkcia

Korelačná funkcia nám opisuje, aká je korelácia medzi dvomi rovnakými hadrónmi s hybnosťami p_1 a p_2 . Je definovaná, ako pomer dvojčasticového spektra $P_2(p_1, p_2)$ a súčinu dvoch jednočasticových spektier. V menovateli korelačnej funkcie potrebujeme mať prakticky dvojčasticové spektrum bez korelácie. To experimentálne dostaneme tak, že budeme brať páry častíc, kde každá častica pochádza z inej udalosti, čím sa zbavíme ich vzájomnej korelácie. Korelačnú funkciu si môžeme napísať v tvare

$$C(p_1, p_2) = \frac{P_2(p_1, p_2)}{P(p_1)P(p_2)} = \frac{E_1 E_2 \frac{d^6 N}{dp_1^3 dp_2^3}}{\left(E_1 \frac{d^3 N}{dp_1^3}\right) \left(E_2 \frac{d^3 N}{dp_2^3}\right)}. \quad (2.1)$$

Táto korelačná funkcia dosahuje hodnotu 1 vtedy, keď hadróny vôbec nekorelujú. To nastáva napríklad v prípade, keď $|p_1 - p_2| \rightarrow \infty$, teda častice letia úplne opačným smerom. Takéto častice sa nemohli žiadnym spôsobom ovplyvniť. Naopak keď $|p_1 - p_2| \rightarrow 0$, korelačná funkcia vytvára vrchol pre neinteragujúce bozóny. To je prípad, kedy častice vyletia z horúcej hmoty veľmi blízko seba vo fázovom priestore. Pri

identických bozónoch je najdôležitejším efektom symetrizácia ich vlnových funkcií a práve tento jav sa prejaví predovšetkým v oblasti, kde sú bozóny blízko seba vo fázo-
vom priestore.

Z princípu neurčitosti vieme, že šírka tohoto špicu bude nepriamo úmerná veľkosti zdroja. Nás bude zaujímať práve oblasť, kedy sú častice silno korelované. V takom prípade sa oplatí zdefinovať si namiesto hybností p_1 a p_2 hybnosti

$$K = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \quad (2.2a)$$

$$q = p_1 - p_2 \quad (2.2b)$$

V tomto prípade je K štvorhybnosťou ťažiska našich dvoch častíc a q rozdielovou štvorhybnosťou. Nultú zložku hybnosti K ešte aproximujeme, aby bol jej kvadrát rovný hmotnosti častice

$$K^0 = \sqrt{m^2 + \vec{K}^2}. \quad (2.3)$$

Zdrojom častíc je horúca hmota charakterizovaná emisnou funkciou $S(x, p)$. Jednočasticové spektrum môžeme vypočítať integrovaním emisnej funkcie podľa vzťahu (1.11). Dvojčasticové spektrum získame pomocou Fourierovej transformácie emisnej funkcie. Výslednú korelačnú funkciu preto môžeme písať v tvare

$$C(p_1, p_2) = C(q, K) = 1 + \frac{|\int d^4x S(x, K) \exp(iqx)|^2}{\int d^4x S(x, p_1) \int d^4x S(x, p_2)}. \quad (2.4)$$

Fyzikálne zaujímavá je práve oblasť okolo špicu, preto uvažujeme malé hodnoty q , odkiaľ potom $p_1 \approx p_2 \approx K$, čo je hlavnou výhodou zavedenia hybností K a q . Rovnica (2.4) tak prejde do tvaru

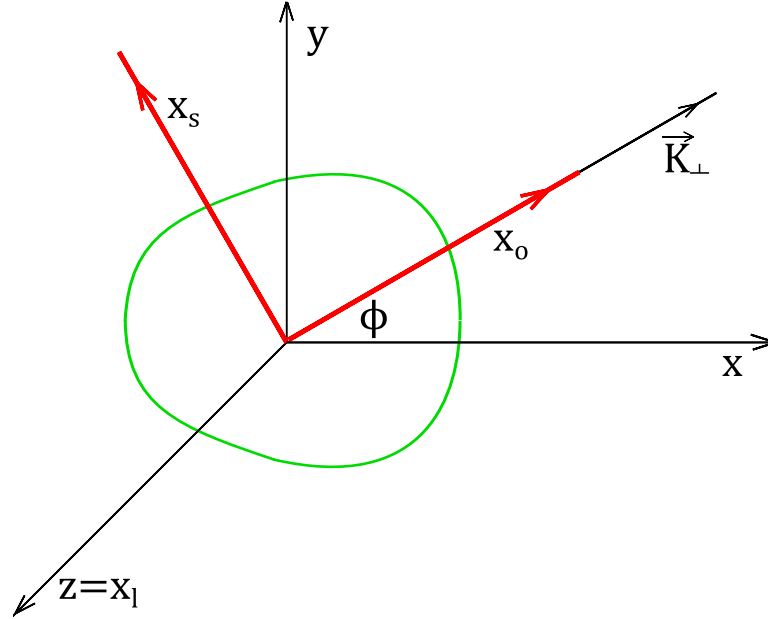
$$C(q, K) - 1 \approx \frac{|\int d^4x S(x, K) \exp(iqx)|^2}{(\int d^4x S(x, K))^2}. \quad (2.5)$$

V tomto momente je vhodné zmeniť sústavu súradníc. Konkrétne spravíme otočenie súradníc tak, aby os x bola otočená v smere priemetu vektora \vec{K} na priečnu rovinu. Túto os nazývame hlavnou (v angličtine *outward*) x_o , os na ňu kolmú v priečnej rovine nazývame bočnou (v angličtine *sideward*) x_s a os z , ktorá sa nezmenila, nazývame pozdĺžnou (v angličtine *longitudinal*) osou x_l . Zmena súradníc oproti pôvodným je znázornená na obr. 2.1. V takýchto súradniciach je štvorvektor K rovný

$$K = (K^0, K^o, 0, K^l). \quad (2.6)$$

Rozložením korelačnej funkcie do Taylorovho radu podľa hybnosti q a porovnaním s Taylorovým radom Gaussovho rozdelenia sa dá ukázať [2], že korelačnú funkciu možno aproximovať do tvaru

$$C(q, K) - 1 \approx \exp(-q^\mu q^\nu \langle \tilde{x}_\mu \tilde{x}_\nu \rangle). \quad (2.7)$$



Obr. 2.1: Vzťah *out-side-long* súradníc ku klasickým súradniciam. Na obrázku je zelenou farbou vyznačená horúca hmota, čiernou farbou klasické súradnice a červenou *osl* súradnice.

Stredné hodnoty sa v tomto prípade myslia ako ustredňovanie cez emisnú funkciu, čo môžeme zapísať ako

$$\langle f(x) \rangle (K) = \frac{\int d^4x f(x) S(x, K)}{\int d^4x S(x, K)}. \quad (2.8)$$

Označenie \tilde{x} je definované ako rozdiel aktuálnej hodnoty a strednej hodnoty, teda

$$\tilde{x}_\mu = x_\mu - \langle x_\mu \rangle. \quad (2.9)$$

2.2 HBT polomery

Je dôležité uvedomiť si, že štvorvektory q a K sú navzájom previazané rovnicou

$$q^\mu K_\mu = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) = \frac{1}{2}(m^2 - m^2) = 0. \quad (2.10)$$

To znamená, že iba tri zložky relatívnej hybnosti q sú nezávislé. Tú štvrtú môžeme určiť pomocou hybnosti K

$$q^0 = \vec{q} \cdot \vec{\beta} = q_o \beta_o + q_l \beta_l, \quad (2.11)$$

kde sme ešte pridali vektor $\vec{\beta}$ definovaný ako

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{K}}{K^0} = (\beta_o, 0, \beta_l). \quad (2.12)$$

Keďže si q^0 vieme vyjadriť pomocou ostatných zložiek tohoto štvorvektora, nebude sa nachádzať v Gaussovej parametrizácii. Tú tak môžeme poskladať z troch zložiek

vektora \vec{q} *out*, *side* a *long*

$$C(q, K) - 1 = \exp \left(-R_o^2 q_o^2 - R_s^2 q_s^2 - R_l^2 q_l^2 - 2R_{os}^2 q_o q_s - 2R_{ol}^2 q_o q_l - 2R_{sl}^2 q_s q_l \right), \quad (2.13)$$

kde koeficienty R_i sú korelačné polomery alebo HBT polomery. Z rovnice (2.7) si môžeme vyjadriť korelačné polomery pomocou rozptylov a variancií. Ak k tomu ešte pridáme podmienku (2.11), môžeme korelačné polomery napísať v tvare

$$R_o^2(K) = \left\langle (\tilde{x}_o - \beta_o \tilde{t})^2 \right\rangle (K) \quad (2.14a)$$

$$R_s^2(K) = \left\langle \tilde{x}_s^2 \right\rangle (K) \quad (2.14b)$$

$$R_l^2(K) = \left\langle (\tilde{x}_l - \beta_l \tilde{t})^2 \right\rangle (K) \quad (2.14c)$$

$$R_{os}^2(K) = \left\langle (\tilde{x}_o - \beta_o \tilde{t}) \tilde{x}_s \right\rangle (K) \quad (2.14d)$$

$$R_{ol}^2(K) = \left\langle (\tilde{x}_o - \beta_o \tilde{t}) (\tilde{x}_l - \beta_l \tilde{t}) \right\rangle (K) \quad (2.14e)$$

$$R_{sl}^2(K) = \left\langle (\tilde{x}_l - \beta_l \tilde{t}) \tilde{x}_s \right\rangle (K). \quad (2.14f)$$

A čo nám vlastne tieto polomery hovoria? V prvom rade treba povedať, že sa nejedná o skutočný polomer horúcej hmoty. Všetky HBT polomery sú funkciami hybnosti K . Keď sa pozrieme na častice, ktoré sú emitované s hybnosťou K , môžeme si uvedomiť, že tieto častice nemôžu byť emitované hocikde, napríklad nemôžu byť emitované na jednej strane horúcej hmoty a letieť smerom cez stred horúcej hmoty na druhú stranu. Existuje oblasť zvaná oblasť homogenity, ktorá určuje, kde môžu byť emitované hadróny s danou hybnosťou, a práve rozmery tejto oblasti nám udávajú HBT polomery.

Podobne ako spektrum, aj HBT polomery meriame pod rôznym azimutálnym uhlom a ukazuje sa, že sú tiež azimutálne závislé. Ako také ich preto môžeme opäť rozvinúť do Fourierovho radu a sledovať závislosti jednotlivých koeficientov. Vo všeobecnosti tak budú mať korelačné polomery tvar

$$R_\mu^2 = (R_\mu^2)_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (R_\mu^2)_n \cos(n(\phi - \delta_n)), \quad (2.15)$$

kde δ_n je fázový posun n -tého rádu anizotropie a je to teda tiež parameter Fourierovho radu. Nás však budú podobne ako pri spektre zaujímať relatívne a nie absolútne koeficienty, teda v tvare $(R_\mu^2)_n / (R_\mu^2)_0$.

Kapitola 3

Simulácia produkcie častíc

V tejto kapitole sa budeme venovať simuláciám a triedeniu udalostí a následnému počítaniu korelačných funkcií a korelačných polomerov. Zaujímá nás, aký je rozdiel, keď robíme korelačnú femtoskopiu na všetkých udalostiach alebo iba na určitej časti udalostí, ktoré sú si navzájom podobné svojim tvarom. Domnievame sa, že v takom prípade by mali podobné udalosti vykazovať také anizotropie, v ktorých bude viditeľný druhý aj tretí rád.

Zatiaľ sa budeme venovať iba simulovaniu častíc a korelačnej femtoskopii, pri ktorej budeme sumovať cez všetky udalosti.

3.1 Generátory udalostí

Na vygenerovanie udalostí využijeme dva rôzne generátory, ktoré sú založené na rôznych princípoch. V oboch prípadoch sa jedná o voľne dostupný softvér.

3.1.1 DRAGON

DRAGON [6] je program, ktorý generuje častice produkované v ultrarelativistických jadrových zrážkach metódou Monte Carlo. Je založený na blast-wave modeli. Hlavným rozdielom medzi DRAGON-om a inými generátormi je v tom, že tento program negeneruje zrážku, ale generuje priamo tvar horúcej hmoty ktorá vznikla po zrážke. Do tohto programu tak nevstupujú parametre ako energia zrážky, zrážkový parameter alebo počet nukleónov v jadre, ale napr. parametre anizotropií horúcej hmoty.

Ako prvé DRAGON generuje tvar horúcej hmoty. To znamená, že sa vygenerujú parametre anizotropií z blast-wave modelu a_n , ρ_n a θ_n . Program je upravený tak, že uvažuje okrem anizotropie druhého rádu aj tretí rád. V horúcej hmote sú následne generované častice. Tie dostanú priradený štvorvektor polohy a štvorhybnosť. Program zahŕňa tiež voliteľnú produkciu rezonancií, ktoré sa ešte pred detekciou rozpadajú na ďalšie častice.

Parametre anizotropií sú generované s rovnomerným rozdelením v intervale $-0,1$ až $0,1$ pre druhý rád a v intervale $-0,03$ až $0,03$ pre tretí rád anizotropií. Uhly θ_n sú generované rovnomerne z intervalu $\langle 0; 2\pi/n \rangle$. Výstupom programu je súbor so zoznamom častíc vo formáte OSCAR1997A, t.j. každá udalosť začína riadkom s poradovým číslom udalosti a s počtom častíc v danej udalosti. Potom nasleduje pre každú časticu riadok s poradovým číslom častice, identifikačným číslom častice [7], štvorthybnosťou, hmotnosťou a štvorvektorom polohy.

DRAGON má implementovanú aj tvorbu dropletov, ktorú sme však nepotrebovali uvažovať a tak sme túto funkciu nechali vypnutú. Tvorbu rezonancií sme naopak nechali zapnutú. Hranice pozdĺžnej rapidity sme nastavili v rozmedzí -5 až 5 , pričom do súboru sa budú vypisovať iba častice s rapiditou v rozmedzí -1 až 1 . Rozdelenie pozdĺžnej rapidity je rovnomerné v rámci hraníc.

Ďalšie parametre programu sme nastavili podľa tabuľky 3.1.

Tabuľka 3.1: Tabuľka nastavených hodnôt programu DRAGON

T_{fo}	0,120 GeV	kinetická teplota vymrznutia
T_{ch}	0,1656 GeV	chemická teplota vymrznutia
μ_b	0,028 GeV	baryochemický potenciál
μ_s	0,0069 GeV	chemický potenciál podivnosti
$\varrho(E)$	0,7 GeV.fm ⁻³	hustota energie
dN/dY	1600	počet častíc na jednotku pozdĺžnej rapidity
R	7 fm	polomer horúcej hmoty
τ_0	10 fm/c	Bjorkenova doba života
ρ_0	0,8	parameter priečnej rapidity

DRAGON je veľmi rýchly generátor práve vďaka tomu, že negeneruje celé zrážky, iba horúcu hmotu. Program dokáže vygenerovať behom 24 hodín zhruba $5 \cdot 10^5$ udalostí, táto rýchlosť sa však môže meniť v závislosti od nastavenia parametrov.

Prvou vzorkou dát, ktorú budeme ďalej spracovávať, je 150 000 udalostí vygenerovaných DRAGON-om. Jedná sa o jedinú vzorku vygenerovanú týmto generátorom, a preto ju budeme označovať *DRAGON*.

3.1.2 AMPT

AMPT [8] je ďalším generátorom udalostí. Ako už ale bolo spomenuté, tento program generuje celé zrážky. Najskôr sú teda vygenerované jadrá, ďalej zrážky medzi jednotlivými nukleónmi a následne produkcia častíc.

AMPT model má štyri hlavné časti: počiatkové podmienky, partónové interakcie, prechod z partónovej hmoty do hadrónovej hmoty a hadrónové interakcie. Na generovanie počiatkových podmienok je použitý HIJING model [9, 10, 11, 12], rozptyl partónov je modelovaný pomocou ZPC [13]. Partóny sú rekombinované s využitím lundského

strunového fragmentačného modelu [14, 15, 16] a dynamika hadrónovej hmoty je založená na ART modeli [17, 18].

V AMPT tiež nemáme možnosť priamo kontrolovať anizotropie nejakým parametrom, keďže sú častice generované priamo zo simulovanej zrážky. Jediný parameter, ktorým môžeme ovplyvniť anizotropiu je zrážkový parameter. Oproti tomu DRAGON generuje častice z horúcej hmoty, ktorej parametre sme schopní do programu priamo zaviesť. Aby sme v udalostiach videli anizotropiu, vybrali sme udalosti so zrážkovým parametrom 7 až 10 fm. To odpovedá rozmedziu centrality približne 20 – 40%.

AMPT má veľkú výhodu v tom, že dokáže veľmi dobre generovať zrážky pri širokom spektre energií. Využijeme to a pre porovnanie vygenerujeme dve vzorky dát: jednou vzorkou bude zrážka Pb-Pb pri energii na LHC a druhou zrážka Au-Au pri energii na RHIC.

Najskôr sme generovali udalosti zo zrážok jadier olova $^{208}_{82}\text{Pb}$. Energiu zrážky sme nastavili na hodnotu $\sqrt{s_{NN}} = 2760\text{ GeV}$, čo odpovedá energii zrážky na LHC. Následne sme generovali udalosti zo zrážok jadier zlata $^{197}_{79}\text{Au}$. Energiu tejto zrážky sme nastavili na $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{ GeV}$, čo odpovedá energii zrážky na urýchľovači RHIC.

Ostatné parametre programu týkajúce sa jednotlivých krokov programu sme nechali na predvolených hodnotách podľa tabuľky 3.2.

Tabuľka 3.2: Tabuľka nastavených hodnôt programu AMPT

NTMAX	1000	počet časových krokov
DT	0,2 fm	veľkosť časového kroku
a	2,2	parameter lundskej symetrickej rozdeľovacej funkcie
b	0,5	parameter lundskej symetrickej rozdeľovacej funkcie
μ	$2,097\text{ fm}^{-1}$	partónová tieniaca hmotnosť ¹
α	0,47	parameter v ZPC

Tento generátor je fyzikálnejší a realistickejší ako DRAGON, avšak je časovo rádovo náročnejší a tak je počet udalostí, ktoré sme schopní vygenerovať, obmedzený. V priebehu 24 hodín je AMPT schopné vygenerovať zhruba 200 udalostí ale opäť to závisí od nastavenia parametrov. Aj s použitím paralelného generovania udalostí sú tak naše možnosti obmedzené. Pre obe vzorky sme tak vygenerovali 10 000 udalostí. Tieto dve vzorky budeme označovať ako *AMPT-LHC* a *AMPT-RHIC*.

3.2 Počítanie korelačných funkcií

Na počítanie korelačných funkcií použijeme program CRAB [19]. Jedná sa o program, ktorý generuje korelačné funkcie. Vstupom do programu je súbor s bodmi fázového priestoru, ktorý opisuje konečnú štvorhybnosť a polohu generovania častice. Program

¹štvorec prevrátenej hodnoty tohto parametra je úmerný účinnému prierezu partónov

vyberá dvojice častíc a počíta korelácie medzi nimi. CRAB zároveň dokáže generovať korelačné funkcie s dôrazom na priemerovanie cez zrážkový parameter, experimentálnu akceptanciu či kinematické rezy.

CRAB má tiež implementované korekcie na Coulombovskú interakciu medzi nabitými časticami a tiež na silnú interakciu. Tieto korekcie sme však nechali vypnuté, aby nám pre $\vec{q} = 0$ vznikalo maximum a nie minimum. V experimentálnych dátach, kedy výsledky obsahujú aj Coulombovskú a silnú interakciu, sa to prejavuje práve poklesom korelačnej funkcie pre $\vec{q} \rightarrow 0$.

Výstupom programu je závislosť korelačnej funkcie na vektore \vec{q} , pričom je možnosť zvoliť si, či má byť výstup jednorozmerný závislý na q_{inv} alebo trojrozmerný závislý od zložiek q_o , q_s a q_l . Keďže je našim cieľom fitovať korelačnú funkciu vo všetkých troch rozmeroch, zvolili sme práve druhý spomenutý výstup. Ďalej si v programe môžeme zvoliť rozmedzie zložiek vektora \vec{q} a počet bodov, pre ktoré sa bude korelačná funkcia generovať. My sme si zvolili, aby program generoval korelačnú funkciu pre 10 bodov v rozmedzí 0 až 50 MeV pre každý smer², teda dokopy 1000 bodov.

V programe je tiež možnosť vytvoriť filtre na častice. Program prirodzene vyberá zo všetkých častíc iba pióny. Dá sa nastaviť aj filter na priečnu hybnosť častíc, no pre lepšiu štatistiku sme žiadny filter nenastavili a korelačné funkcie sme počítali z častíc s ľubovoľnými priečnymi hybnosťami.

Dôležitým parametrom programu je počet párov, ktoré chceme vygenerovať. Väčšie množstvo párov znižuje nepresnosť výsledkov, no tiež zvyšuje časovú náročnosť výpočtov. Pre našu prácu sme používali $5 \cdot 10^8$ generovaných párov častíc, nakoľko časová náročnosť je zhruba 24 hodín a nepresnosť vypočítanej korelačnej funkcie je menšia ako 0,3%.

Korelačnú funkciu následne nafitujeme gaussovskou funkciou v tvare

$$C(\vec{q}) = 1 + \exp(-R_o^2 q_o^2 - R_s^2 q_s^2 - R_l^2 q_l^2) \quad (3.1)$$

odkiaľ dostaneme korelačné polomery R_o , R_s a R_l . My budeme skúmať azimutálnu závislosť týchto korelačných polomerov. Tú si môžeme rozvinúť do Fourierovho radu ako

$$R_\mu^2 = (R_\mu^2)_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (R_\mu^2)_n \cos(n(\phi - \delta_n)), \quad (3.2)$$

pričom nás budú zaujímať relatívne koeficienty Fourierovho radu v tvare $(R_\mu^2)_n / (R_\mu^2)_0$.

3.3 Azimutálna závislosť korelačných polomerov

Máme teda vygenerované 3 vzorky udalostí: *DRAGON* (150 000 udalostí), *AMPT-RHIC* (10 000 udalostí) a *AMPT-LHC* (10 000 udalostí). V každej z udalostí sú vygenerované častice letiace rôznym smerom. Keď spravíme azimutálny histogram toho, do

²t.j. bude vygenerovaná korelačná funkcia pre body $\vec{q} = (2, 5; 2, 5; 2, 5)$ MeV, $\vec{q} = (2, 5; 2, 5; 7, 5)$ MeV, $\vec{q} = (2, 5; 2, 5; 12, 5)$ MeV atď až po $\vec{q} = (47, 5; 47, 5; 47, 5)$ MeV.

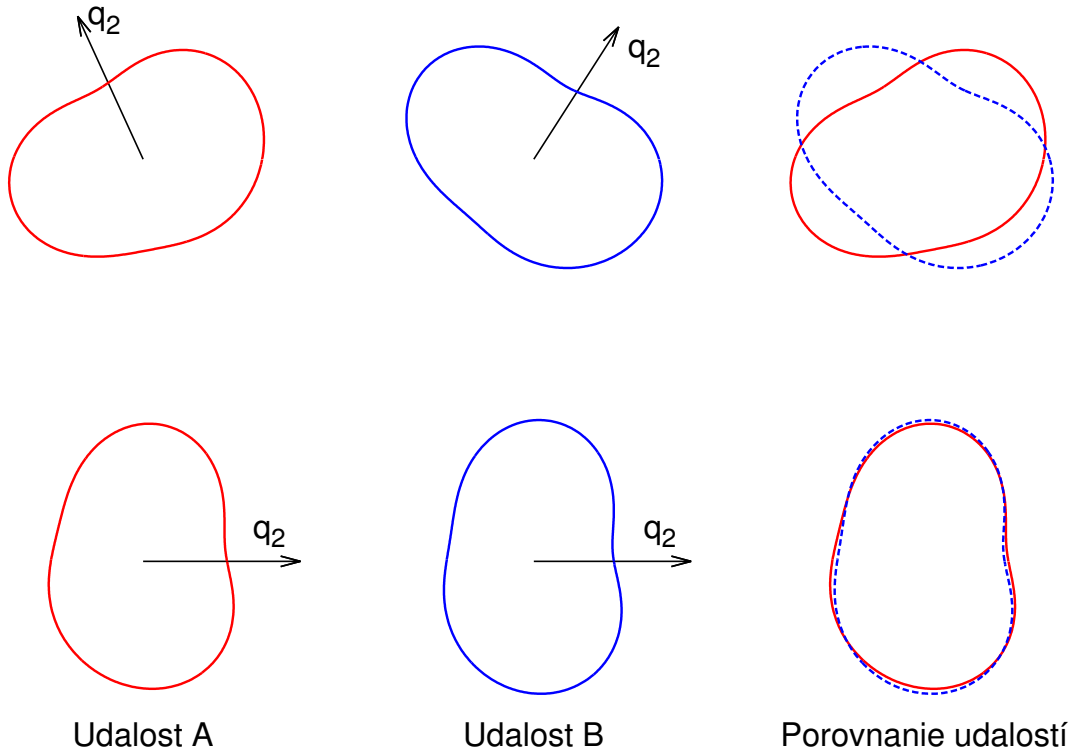
ktorého smeru častice jednej udalosti letia, dostaneme tvar udalosti, ktorý bude kvôli necentralite zrážok vyzerat' ako kombinácia harmonických funkcií.

V nasledujúcej kapitole sa budeme venovať triedeniu udalostí práve podľa tohto tvaru. Budeme sa snažiť usporiadať udalosti tak, aby tie, ktoré majú podobný tvar, boli vedľa seba. Platí však, že nám môžu vzniknúť dve veľmi podobné udalosti, ktorú sú akurát rôzne otočené. Na určenie toho, ktorým smerom je vlastne udalosť otočená využijeme vektor \vec{q}_n definovaný vzťahom

$$\vec{q}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{i=1}^N \cos(n\phi_i), \sum_{i=1}^N \sin(n\phi_i) \right), \quad (3.3)$$

kde N je počet častíc v jednej udalosti. Tento vektor v podstate opisuje, ktorým smerom je natočená n -tá harmonická funkcia. Je teda zrejmé, že tento vektor úzko súvisí s uhlami θ_n , ktoré sme mali zavedené ako parameter v blast-wave modeli. Uhly θ_n však nie sú experimentálne merateľné, a navyše sú definované iba v blast-wave modeli, čo znamená, že by sme ich mohli využiť iba pri vzorke *DRAGON*.

Ešte predtým, ako začneme udalosti triediť, otočíme všetky udalosti tak, aby vektor \vec{q}_2 smeroval rovnobežne s osou x . Vyhneme sa tak situáciám, kedy by boli dve udalosti podobné, len rôzne natočené (viď obr. 3.1).



Obr. 3.1: Aj udalosti, ktoré na prvý pohľad vyzerajú odlišne môžu byť veľmi podobné, len rôzne natočené. Tým, že všetky udalosti nasmerujeme tak, aby mali rovnaký smer vektoru \vec{q}_2 , nájdeme aj podobnosť takýchto udalostí.

Preto musíme najprv pre každú jednu udalosť spočítať vektor \vec{q}_2 . Každú časticu z danej udalosti potom otočíme pre násobením maticou rotácie o uhol polovičný oproti tomu, ktorý zvierá \vec{q}_2 s osou x . Tým docielime, že všetky udalosti budú mať $\theta_2 \approx 0$.

Keďže teraz máme všetky udalosti rovnako natočené, vieme, že anizotropia druhého rádu sa medzi jednotlivými udalosťami nasčíta, zatiaľ čo anizotropia tretieho rádu sa navzájom vyruší. Výsledkom je, že pri počítaní korelačných polomerov a ich azimutálnej závislosti môžeme vidieť anizotropiu druhého rádu.

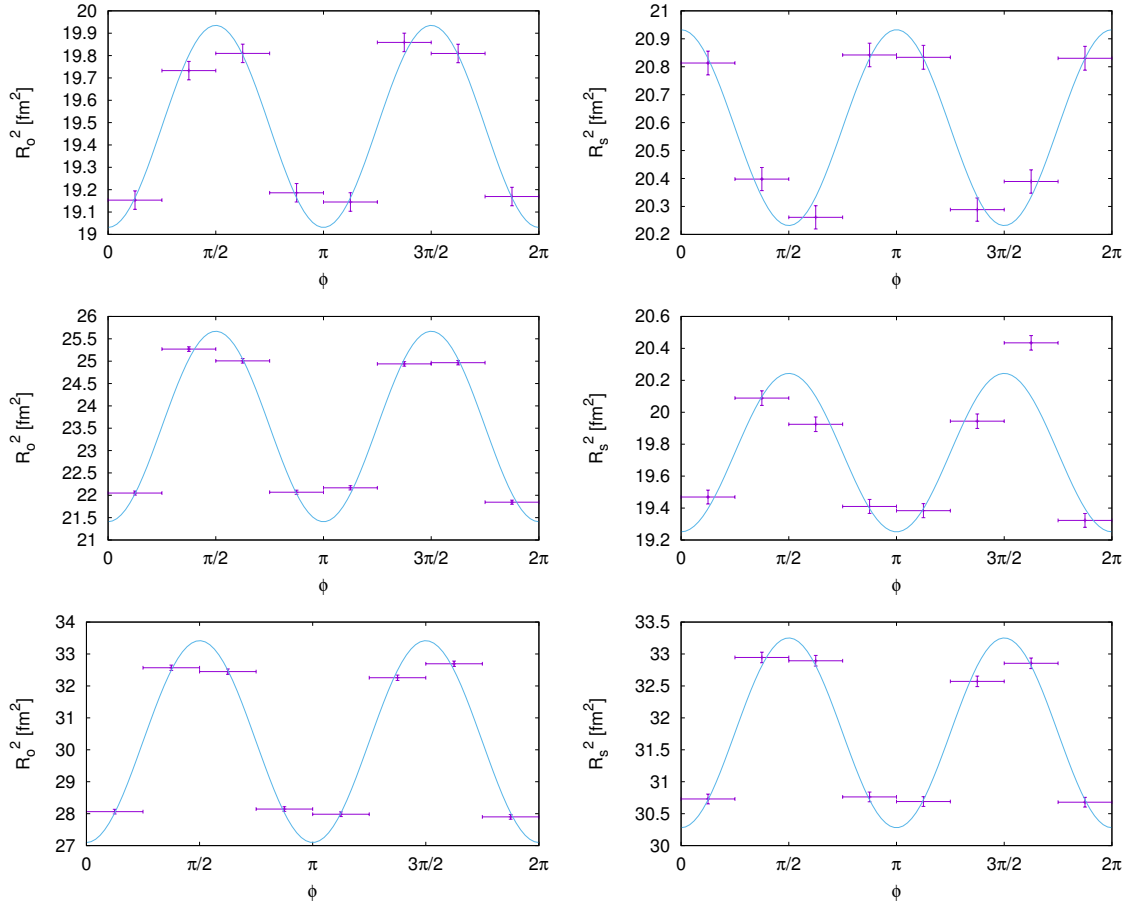
Na určovanie azimutálnej závislosti korelačných polomerov musíme najskôr roztriediť jednotlivé častice. Vo všetkých udalostiach sme potriedili častice podľa ich štvorhybnosti do ôsmich uhlových košov. To znamená, že ak hybnosť častice v priečnej rovine smeruje medzi uhlami 0 a $\pi/4$, pôjde častica do prvého koša. Ak táto hybnosť smeruje medzi uhlami $\pi/4$ a $\pi/2$, pôjde častica do druhého koša atď. Vo výsledku tak budeme mať súbory, v ktorých bude rovnako veľa udalostí, no v každej udalosti bude iba zhruba osmina počtu častíc, ktorá sa tam nachádzala pred triedením.

Z každého koša tak môžeme pomocou programu CRAB vypočítať 3D korelačnú funkciu. Tá zakaždým odpovedá inému intervalu azimutu. Nafitovaním korelačnej funkcie gaussovskou funkciou podľa vzťahu (3.1) následne dostaneme korelačné polomery. Túto procedúru sme aplikovali na všetky 3 vzorky a výsledkom sú grafy na obrázku 3.2.

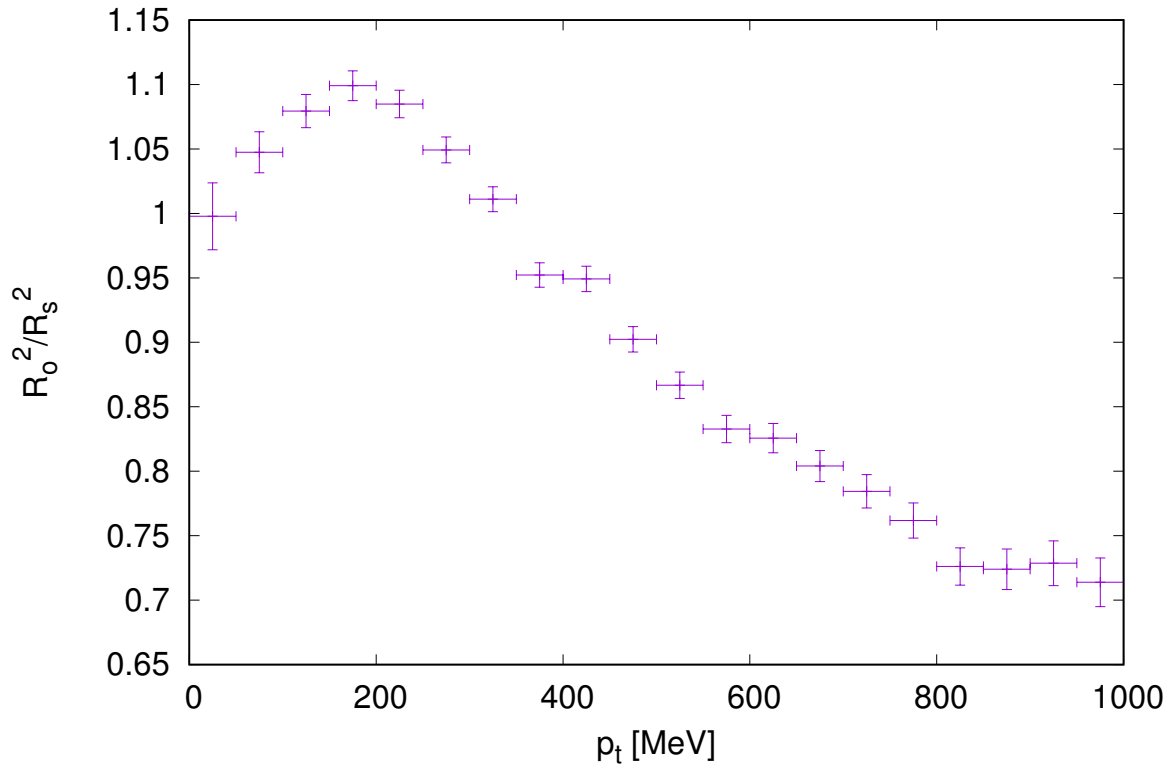
Na týchto obrázkoch si môžeme všimnúť hneď niekoľkých vecí. V prvom rade si môžeme všimnúť, že neistoty fitu sú pre *DRAGON* väčšie ako pre ostatné vzorky, čo môže byť spôsobené tým, že korelačná funkcia pre *DRAGON* nemá až taký dobrý gaussovský tvar, aby sa dala dobre nafitovať. To odpovedá tomu, že Lévyho parameter α je pre túto vzorku relatívne ďaleko od hodnoty 2.

Ďalej na grafoch vidíme, že *DRAGON* má korelačné polomery v protifáze, zatiaľ čo obe *AMPT* vzorky majú korelačné polomery vo fáze. To znamená, že každý z modelov predpokladá iné správanie pre oblasť homogenity.

Poslednou zaujímavosťou na týchto grafoch je fakt, že je experimentálne pozorované, že $R_o > R_s$. S tým súhlasia vzorky *AMPT*, no pre *DRAGON* je $R_o < R_s$. To je spôsobené tým, že sme pri výpočte korelačnej funkcie nebrali do úvahy žiaden filter na priečnu hybnosť. Vypočítali sme si preto korelačné polomery pre rôznu priečnu hybnosť a ich vzájomný pomer sme vykreslili na graf ako funkciu priečnej hybnosti. Tento graf je znázornený na obrázku 3.3. Na tomto grafe vidíme, že v oblasti 0 – 300 MeV platí $R_o > R_s$ ako by sme očakávali, ale pre vyššie priečne hybnosti sa táto nerovnosť otáča. Presumovaním cez častice so všetkými priečnymi hybnosťami preto dostávame vo výsledku $R_o < R_s$.



Obr. 3.2: Azimutálna závislosť korelačných polomerov pre 150 000 udalostí vygenerovaných programom DRAGON (prvý riadok) a 10 000 udalostí vygenerovaných programom AMPT pri energii RHIC (druhý riadok) a LHC (tretí riadok). V ľavom stĺpci sú na grafoch znázornené azimutálne závislosti pre R_o^2 , v pravom stĺpci pre R_s^2 . Neistota v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu. Modrou čiarou je znázornený fit grafu funkciou $f(x) = a + b \cos(2x)$. Udalosti boli v DRAGONE simulované s anizotropiami v rozmedzí -0,1 až 0,1 pre druhý rád a -0,03 až 0,03 pre tretí rád, udalosti vzorky *AMPT-RHIC* mali parametre simulovaných zrážok $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, $b_{min} = 7$ fm a $b_{max} = 10$ fm, pričom zrážaným materiálom bolo zlato a nakoniec vzorka *AMPT-LHC* bola generovaná s parametrami $\sqrt{s_{NN}} = 2760$ GeV, $b_{min} = 7$ fm a $b_{max} = 10$ fm, pričom zrážaným materiálom bolo olovo. Korelačné funkcie boli generované bez obmedzenia na priečnu hybnosť.



Obr. 3.3: Závislosť pomeru korelačných polomerov R_o^2/R_s^2 od priečnej hybnosti p_t . V programe DRAGON sme vygenerovali 50 000 udalostí s anizotropiami $-0,1$ až $0,1$ pre druhý rád a $-0,03$ až $0,03$ pre tretí rád a následne sme pre rôzne priečne hybnosti vypočítali korelačnú funkciu pomocou programu CRAB. Neistota v x -ovom smere odpovedá šírke hybnostného koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu.

Kapitola 4

Triedenie udalostí podľa tvaru

V experimentoch sa kvôli lepšej štatistike vždy sumuje cez množstvo zrážok. Takýmto sumovaním však strácame prehľad o anizotropiách, pretože tie sa vo veľkom množstve udalostí vyrušia z dôvodu symetrie.

Prvý krok, ktorý sme preto spravili, bol, že sme všetky udalosti otočili tak, aby ich vektor \vec{q}_2 smeroval pozdĺž osi x . Takýmto spôsobom sme docielili, že pri presumovaní cez všetky udalosti anizotropia druhého rádu interferuje, zatiaľ čo vyššie anizotropie sa navzájom vyrušia. To však môžeme rovnako urobiť aj pre vyššie rády. Mohli by sme teda napríklad všetky udalosti otočiť tak, aby vektor \vec{q}_3 smeroval pozdĺž osi x . V takom prípade by mal výsledok nasčítanú anizotropiu tretieho rádu, no ostatné anizotropie by sme tam hľadali márne. Rovnako by to fungovalo aj pre vyššie anizotropie. My sme však zvolili práve \vec{q}_2 , pretože táto anizotropia je najsilnejšia.

Spôsob, akým v experimente môžeme sledovať anizotropiu niektorého rádu, už existuje. Naším cieľom však je ukázať spôsob, akým možno pozorovať anizotropie druhého a aj tretieho rádu súčasne. K tomu využijeme triedenie udalostí podľa tvaru.

Tvar udalosti je charakterizovaný spektrom, ktoré možno rozložiť do Fourierovho radu popísaného vzťahom (1.12). Jeho anizotropie sú popísané koeficientami v_n , podľa ktorých možno udalosti zoraďovať. Ďalším spôsobom, akým od seba možno dve udalosti odlíšiť, je pomocou vektoru \vec{q}_n , ktorý sme si definovali vzťahom (3.3).

Jednou z prvých techník, ktorá sa zaoberala hľadaním podobností v tvaroch udalostí, je inžinierstvo tvaru udalostí (angl. Event Shape Engineering) [20]. Aktuálnejšou technikou, ktorou sa zaoberáme v tejto práci, je triedenie udalostí podľa tvaru (angl. Event Shape Sorting) [21], ktorá zahŕňa viac ako len triedenie podľa \vec{q}_n .

Na základe tejto techniky vznikol program ESSTER [21], ktorého algoritmus sme na triedenie udalostí podľa tvaru použili. Samotný program sme však použiť nemohli, pretože nedokázal spracovať tak veľké vzorky, aké máme vygenerované. Vytvorili sme preto nový program využívajú rovnaký algoritmus a upravený tak, aby dokázal spracovávať aj stovky tisíc udalostí.

4.1 Algoritmus

Program začína tým, že rozdelí častice v každej udalosti do k uhlových košov. Číslo aktuálneho koša budeme označovať i . V našom prípade sme používali $k = 20$.

Následne sa spraví počiatočné zoradenie. Ako vhodnú veličinu sme určili $|\vec{q}_2|$. Zoradili sme všetky udalosti podľa tejto veličiny zostupne. Triedenie udalostí podľa tvaru je iteratívny proces, a preto je algoritmus schopný zotriediť udalosti, aj keby sme ich nechali v náhodnom poradí. To znamená, že počiatočné zoradenie neovplyvňuje výsledok triedenia.

Všetky udalosti teraz roztriedime do ω tried. Aby sme vedeli rozlíšiť triedu udalostí a uhlový kôš, použijeme v tomto prípade značenie gréckymi písmenami a aktuálnu triedu udalostí tak budeme označovať μ .

Ešte si označíme M celkový počet udalostí¹, j číslo aktuálnej udalosti, N_j počet častíc v j -tej udalosti, $\epsilon = \frac{M}{\omega}$ počet udalostí v jednej triede.

Samotný algoritmus triedenia začína tým, že vypočítame pravdepodobnosť toho, že udalosť v triede μ má rozdelenie častíc $\{n_i\}_j$, čo môžeme zapísať ako $P(\{n_i\}_j | \mu)$. Túto pravdepodobnosť môžeme vypočítať pomocou pravdepodobnosti, že častica v i -tom koši patrí do triedy μ . To možno zapísať do vzťahu

$$P(\{n_i\}_j | \mu) = N_j! \prod_{i=1}^k \frac{P(i|\mu)^{(n_i)_j}}{(n_i)_j!}. \quad (4.1)$$

$P(i|\mu)$ udáva pravdepodobnosť toho, že v triede μ máme časticu v i -tom uhlovom koši, čo môžeme vypočítať ako pomer počtu častíc v i -tom koši a celkového počtu častíc danej triedy μ . To môžeme zapísať ako

$$P(i|\mu) = \frac{\sum_{j=\epsilon(\mu-1)}^{\epsilon\mu} (n_i)_j}{\sum_{j=\epsilon(\mu-1)}^{\epsilon\mu} N_j}. \quad (4.2)$$

Nakoniec vypočítame pre nás najpodstatnejšiu pravdepodobnosť, že udalosť s rozdelením častíc $\{n_i\}_j$ patrí do triedy μ . Túto pravdepodobnosť určíme pomocou Bayesovho vzorca pre podmienenú pravdepodobnosť ako

$$P(\mu | \{n_i\}_j) = \frac{P(\{n_i\}_j | \mu) P(\mu)}{P(\{n_i\}_j)} = \frac{P(\{n_i\}_j | \mu) P(\mu)}{\sum_{\mu'=1}^{\omega} P(\{n_i\}_j | \mu') P(\mu')}. \quad (4.3)$$

S využitím vzťahu (4.1) môžeme tento vzťah upraviť do tvaru

$$P(\mu | \{n_i\}_j) = \frac{\prod_{i=1}^k P(i|\mu)^{(n_i)_j} P(\mu)}{\sum_{\mu'=1}^{\omega} \prod_{i=1}^k P(i|\mu')^{(n_i)_j} P(\mu')}. \quad (4.4)$$

Pravdepodobnosť $P(\mu)$ je jednoducho prevrátená hodnota počtu tried, teda $P(\mu) = \frac{1}{\omega}$ a tak dostaneme výsledný vzťah

$$P(\mu | \{n_i\}_j) = \frac{\prod_{i=1}^k P(i|\mu)^{(n_i)_j}}{\sum_{\mu'=1}^{\omega} \prod_{i=1}^k P(i|\mu')^{(n_i)_j}}. \quad (4.5)$$

¹Pre naše vzorky platí $M_{AMPT} = 10\,000$ a $M_{DRAGON} = 150\,000$.

V tomto momente tak máme pre každú udalosť vypočítanú pravdepodobnosť, že patrí do μ -tej triedy. Je preto zrejmé, že musí platiť

$$\sum_{\mu=1}^{\omega} P(\mu | \{n_i\}_j) = 1, \quad (4.6)$$

inak povedané, pravdepodobnosť, že udalosť patrí do nejakej triedy je 1. Máme teda nejaké diskkrétne rozdelenie toho, do ktorej triedy udalosť patrí. Z takéhoto rozdelenia si tak môžeme vypočítať *stredné číslo triedy*

$$\bar{\mu} = \sum_{\mu=1}^{\omega} \mu P(\mu | \{n_i\}_j). \quad (4.7)$$

Posledným krokom algoritmu je zoradiť všetky udalosti podľa $\bar{\mu}$. To nám však spôsobí, že sa zmení obsah jednotlivých tried a tým pádom sa zmení aj priemerný tvar triedy. Môžeme tak odznova určiť pravdepodobnosti $P(\mu | \{n_i\}_j)$ a tiež stredné číslo triedy pre každú udalosť a opäť podľa neho udalosti zoradiť. Tento proces môžeme opakovať ľubovoľne veľa krát. Algoritmus sa zastaví v momente, kedy sa v priebehu jedného cyklu nezmení poradie udalostí, to znamená, že všetky udalosti zostanú na svojom mieste. Táto podmienka je rovnako silná ako podmienka, že nám stačí aby sa nezmenil obsah tried. V momente, kedy sa nezmení obsah tried, sa nezmení ani priemerný tvar triedy a všetky pravdepodobnosti tak ostanú rovnaké a preto sa nezmení ani poradie udalostí.

Celý algoritmus teda vyzerá nasledovne:

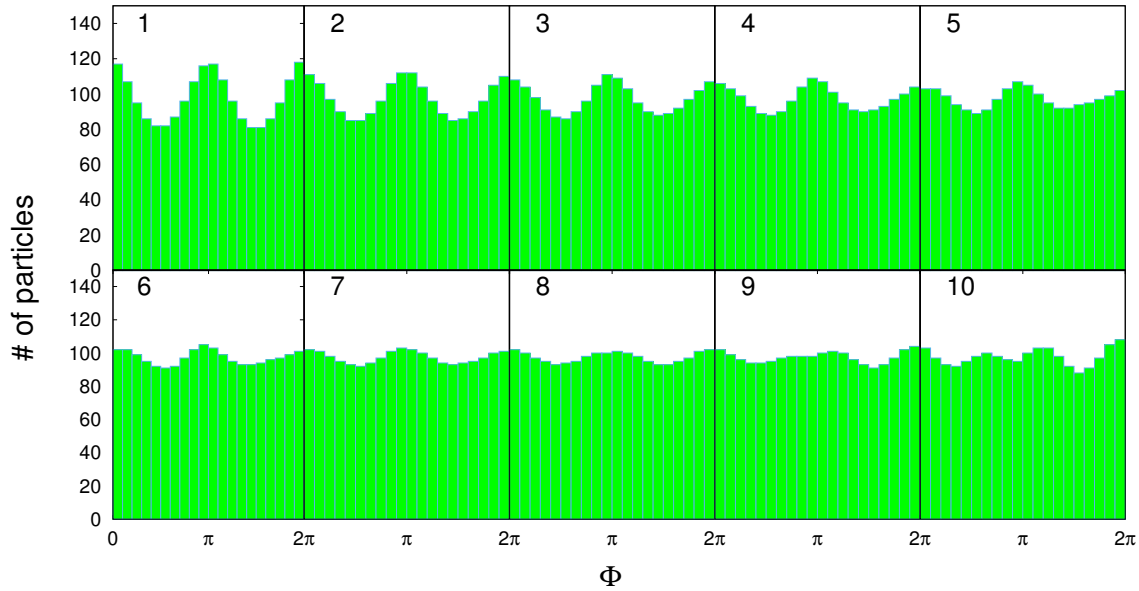
1. v každej udalosti rozdelíme častice do k uhlových košov.
2. Počiatočné zoradenie - zoradíme udalosti zostupne podľa $|\vec{q}_2|$ (nepovinné)
3. Pre každý uhlový kôš v každej triede vypočítame $P(i|\mu)$ podľa vzťahu (4.2).
4. Pre každú udalosť určíme pravdepodobnosť $P(\mu | \{n_i\}_j)$, že patrí do triedy μ , podľa vzťahu (4.5).
5. Pre každú udalosť vypočítame stredné číslo triedy $\bar{\mu}$ podľa vzťahu (4.7).
6. Zoradíme udalosti vzostupne podľa $\bar{\mu}$.
7. Proces opakujeme od tretieho kroku, dokým poradie udalostí nebude ustálené.

4.2 Výsledky triedenia

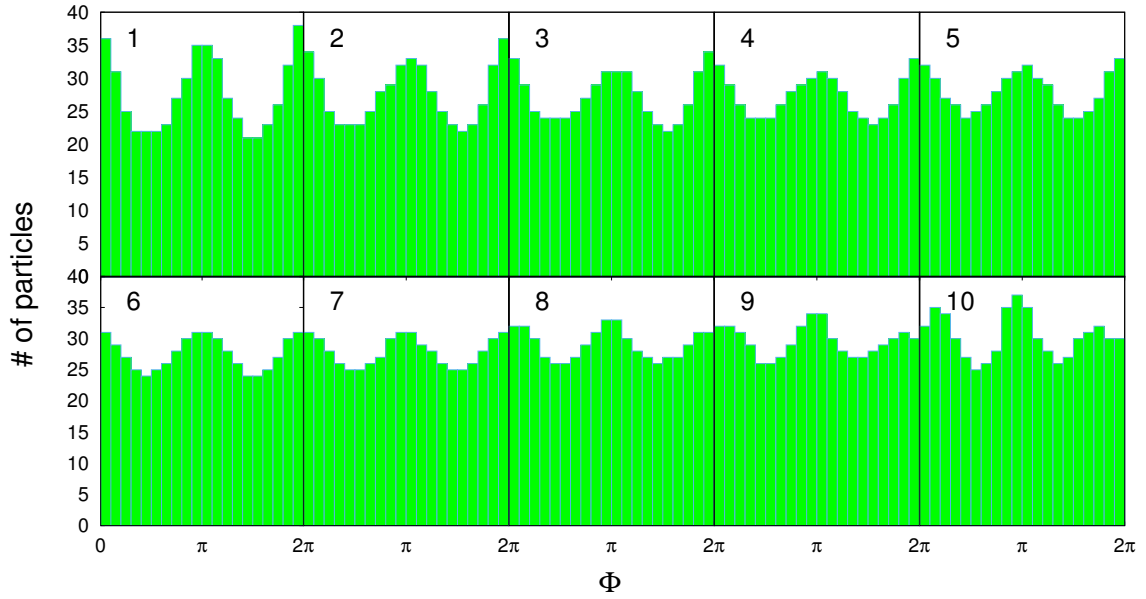
Ešte pred samotným zoradením sme na všetky vzorky vytvorili filter, ktorý nám vybral iba nabité častice s rapiditou $|Y| < 1$. Do úvahy sme brali iba nabitú časticu kvôli tomu, že iba tie meriame. Filter na rapiditu sme zvolili kvôli tomu, že naše

generátory generovali častice s rôznymi hranicami rapidity a takýmto spôsobom sme ich výstupy zjednotili. Navyše tak nebudeme brať do úvahy častice, ktoré sú emitované viac v pozdĺžnom smere ako v priečnom a neovplyvňujú tvar udalosti.

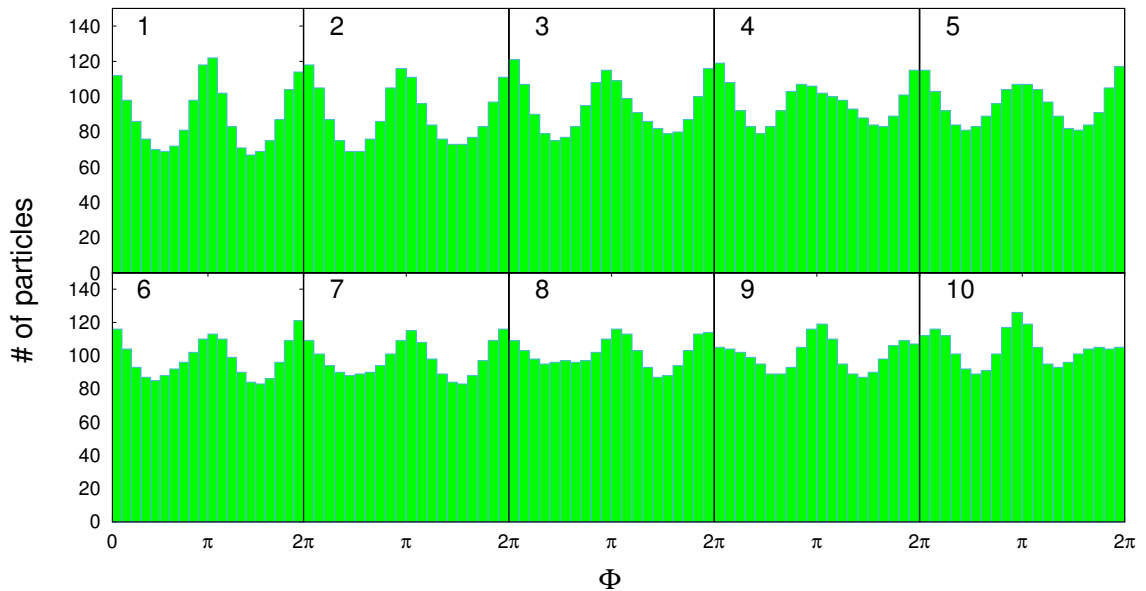
Následne sme na jednotlivé vzorky aplikovali algoritmus opísaný v predchádzajúcej sekcii. Výsledkom tohto algoritmu je poradie zoradených udalostí a ich roztriedenie do jednotlivých tried rozdelenia v azimutálnom uhle. Prvá vec, ktorá nás v tomto momente zaujíma, je priemerný tvar v triedach. Ten je znázornený pre jednotlivé vzorky na obrázkoch 4.1-4.3. Na týchto obrázkoch môžeme pozorovať výsledok triedenia udalostí. Vidíme, že vo všetkých prípadoch je dominantné triedenie podľa veľkosti anizotropie druhého rádu. V prvých triedach vidíme veľmi silné anizotropie druhého rádu. Naopak v posledných triedach je už anizotropia druhého rádu dosť potlačená a začína sa prejavovať anizotropia tretieho rádu, prípadne sa stanú tieto dve anizotropie porovnateľné a v posledných triedach vidíme ich superpozíciu.



Obr. 4.1: Priemerné uhlové histogramy pre jednotlivé triedy po zotriedení udalostí podľa tvaru. Jedná sa o vzorku 150 000 udalostí vygenerovaných programom DRAGON. Udalosti boli simulované s anizotropiami v rozmedzí -0,1 až 0,1 pre druhý rád a -0,03 až 0,03 pre tretí rád. V histogramoch sú zahrnuté iba nabité častice s $|Y| < 1$.



Obr. 4.2: Priemerné uhlové histogramy pre jednotlivé triedy po zotriedení udalostí podľa tvaru. Jedná sa o vzorku 10 000 udalostí vygenerovaných programom AMPT. Parametre simulovaných zrážok boli $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, $b_{min} = 7$ fm a $b_{max} = 10$ fm, zrážaným nuklidom bolo zlato 197. V histogramoch sú zahrnuté iba nabitú častice s $|Y| < 1$.



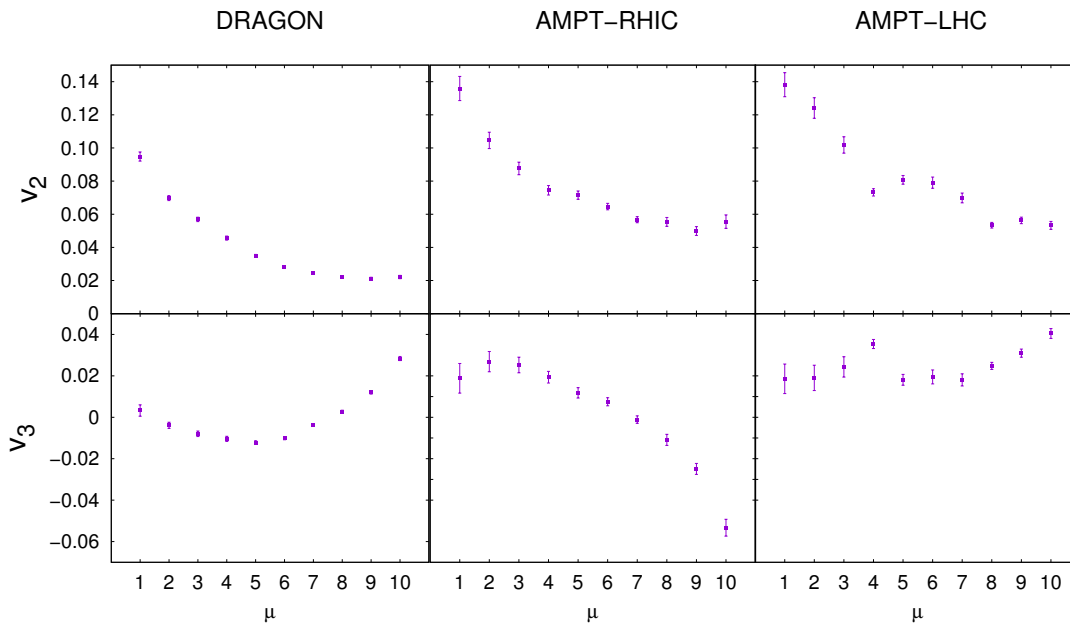
Obr. 4.3: Priemerné uhlové histogramy pre jednotlivé triedy po zotriedení udalostí podľa tvaru. Jedná sa o vzorku 10 000 udalostí vygenerovaných programom AMPT. Parametre simulovaných zrážok boli $\sqrt{s_{NN}} = 2760$ GeV, $b_{min} = 7$ fm a $b_{max} = 10$ fm, zrážaným nuklidom bolo olovo 208. V histogramoch sú zahrnuté iba nabitú častice s $|Y| < 1$.

Aby sme neopisovali obrázky iba podľa oka, bude lepšie, keď určíme koeficienty v_2 a v_3 , ktoré tvar udalosti a jeho anizotropie opisujú. Priemerné tvary udalostí preto nafitujeme funkciou

$$f(x) = v_0 (1 + 2v_2 \cos(2x) + 2v_3 \cos(3(x - \theta_3))). \quad (4.8)$$

Tu ešte treba podotknúť, že máme dve možnosti na obmedzenie parametrov. Prvou možnosťou je obmedziť sa na kladné v_3 , čo by znamenalo, že uhol θ_3 by nadobúdaval hodnoty z intervalu $\langle 0; \frac{2\pi}{3} \rangle$. V takom prípade by sme zmenu tvaru z kladného v_3 na záporné (alebo naopak) videli skokovou zmenou uhla θ_3 . To ale nechceme. Aby sme lepšie videli, ako sa mení tvar anizotropie tretieho rádu, budeme uvažovať v_3 ľubovoľné, ale zato obmedzíme uhol θ_3 na interval $\langle -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \rangle$. Zmenu fázy tak nedostaneme zmenou uhla, ale zmenou znamienka pri v_3 .

Pre každú vzorku tak dostaneme závislosť koeficientov v_2 a v_3 priemernej udalosti od čísla triedy μ . Tieto závislosti sú pre všetky vzorky znázornené na obrázku 4.4.



Obr. 4.4: Závislosť koeficientov Fourierovho rozvoja v_2 a v_3 priemernej udalosti od čísla triedy pre všetky tri vzorky. V prvom riadku je znázornená závislosť koeficientu v_2 , v druhom riadku v_3 . V jednotlivých stĺpcoch sú znázornené výsledky pre jednotlivé vzorky, postupne *DRAGON*, *AMPT-RHIC* a *AMPT-LHC*.

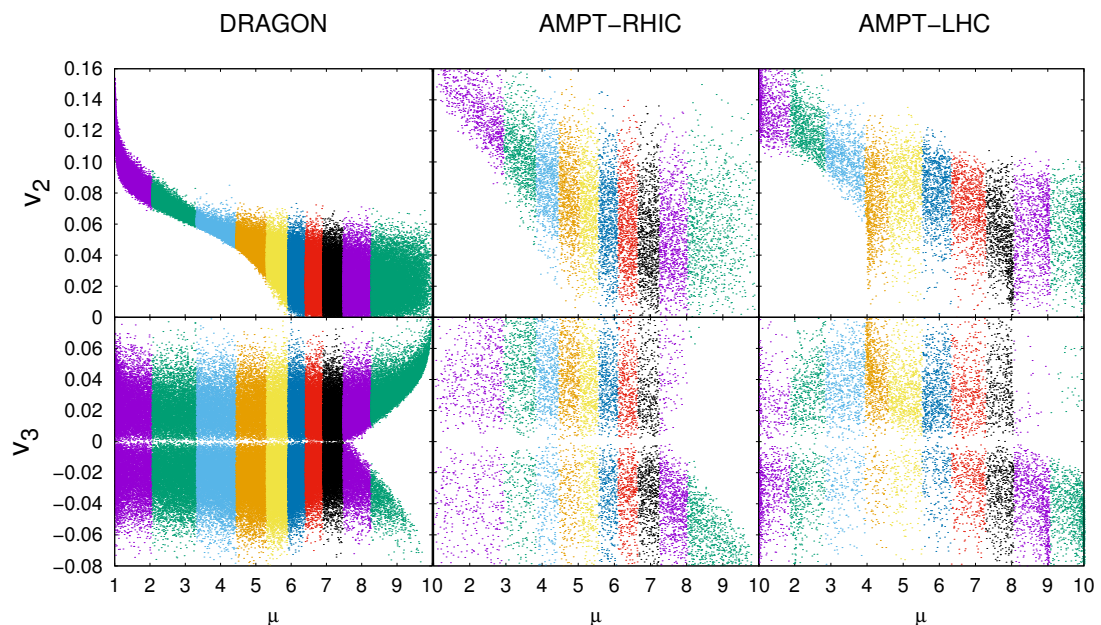
Na týchto grafoch môžeme vidieť, že v anizotropii druhého rádu sa všetky vzorky správajú veľmi podobne. Z maximálnej hodnoty v_2 v prvej triede sa postupne dostaneme na minimálnu hodnotu v poslednej triede.

Správanie sa v anizotropii tretieho rádu je už ale odlišné. Vo vzorke *DRAGON* je v_3 v prvých triedach veľmi blízke nule a zanedbateľné oproti v_2 , no v poslednej triede

je hodnota tohto koeficientu oveľa vyššia, zatiaľ čo druhý rád je v tej triede takmer úplne potlačený. Vo vzorke *AMPT-RHIC* sa hodnota koeficientu v_3 postupne mení z kladnej na zápornú hodnotu, ktorá taktiež dosahuje úrovně anizotropie druhého rádu. Vzorka *AMPT-LHC* nemení znamienko pri v_3 a navyše tento koeficient dosahuje už v prvých triedach relatívne vysoké hodnoty oproti ostatným vzorkám. V tomto prípade však koeficient v_2 neklesá k tak nízkym hodnotám, aby bol druhý rád slabší ako tretí.

Keďže máme vypočítané priemerné číslo triedy a vieme určiť aj uhlové rozdelenie častíc pre každú udalosť, dokážeme spočítať aj v_2 a v_3 a vykresliť si závislosť týchto koeficientov od priemerného čísla triedy pre každú jednu udalosť. Dostaneme tak obrázky, ktoré nereprezentujú iba priemernú udalosť, ale každú udalosť. Tieto závislosti sú znázornené na obrázku 4.5.

Tieto obrázky lepšie opisujú rozptyl koeficientov v_2 a v_3 v udalostiach. Na týchto grafoch môžeme vidieť celkom podobné správanie všetkých vzoriek, a to, že v_2 klesá približne lineárne, zatiaľ čo v_3 sa zdá byť relatívne náhodné. Na vzorke *DRAGON* vidno oveľa sústredenejší pás v prvých triedach závislosti koeficientu v_2 . V posledných triedach je však už tento koeficient viac rozostrený, zato koeficient v_3 sa práve v poslednej triede sústreďuje do relatívne úzkeho pásu a iba ku kladným hodnotám. Vzorka *AMPT-LHC* je zo všetkých najviac rozostrená, ale aj tu vidno na anizotropii tretieho rádu, že v posledných triedach sa hodnoty v_3 držia iba v záporných číslach.



Obr. 4.5: Závislosť koeficientov Fourierovho rozvoja v_2 a v_3 všetkých udalostí od stredného čísla triedy pre všetky tri vzorky. V prvom riadku je znázornená závislosť koeficientu v_2 , v druhom riadku v_3 . V jednotlivých stĺpcoch sú znázornené výsledky pre jednotlivé vzorky, postupne *DRAGON*, *AMPT-RHIC* a *AMPT-LHC*.

Kapitola 5

Korelačná femtoskopia podobných udalostí

Udalosti máme zoradené a roztriedené do desiatich tried tak, že v každej triede sú navzájom podobné udalosti. Ako sme mohli vidieť na grafoch koeficientov v_2 a v_3 , už tu je vidno, že sa v jednotlivých triedach prejavuje súčasne druhý aj tretí rád anizotropií.

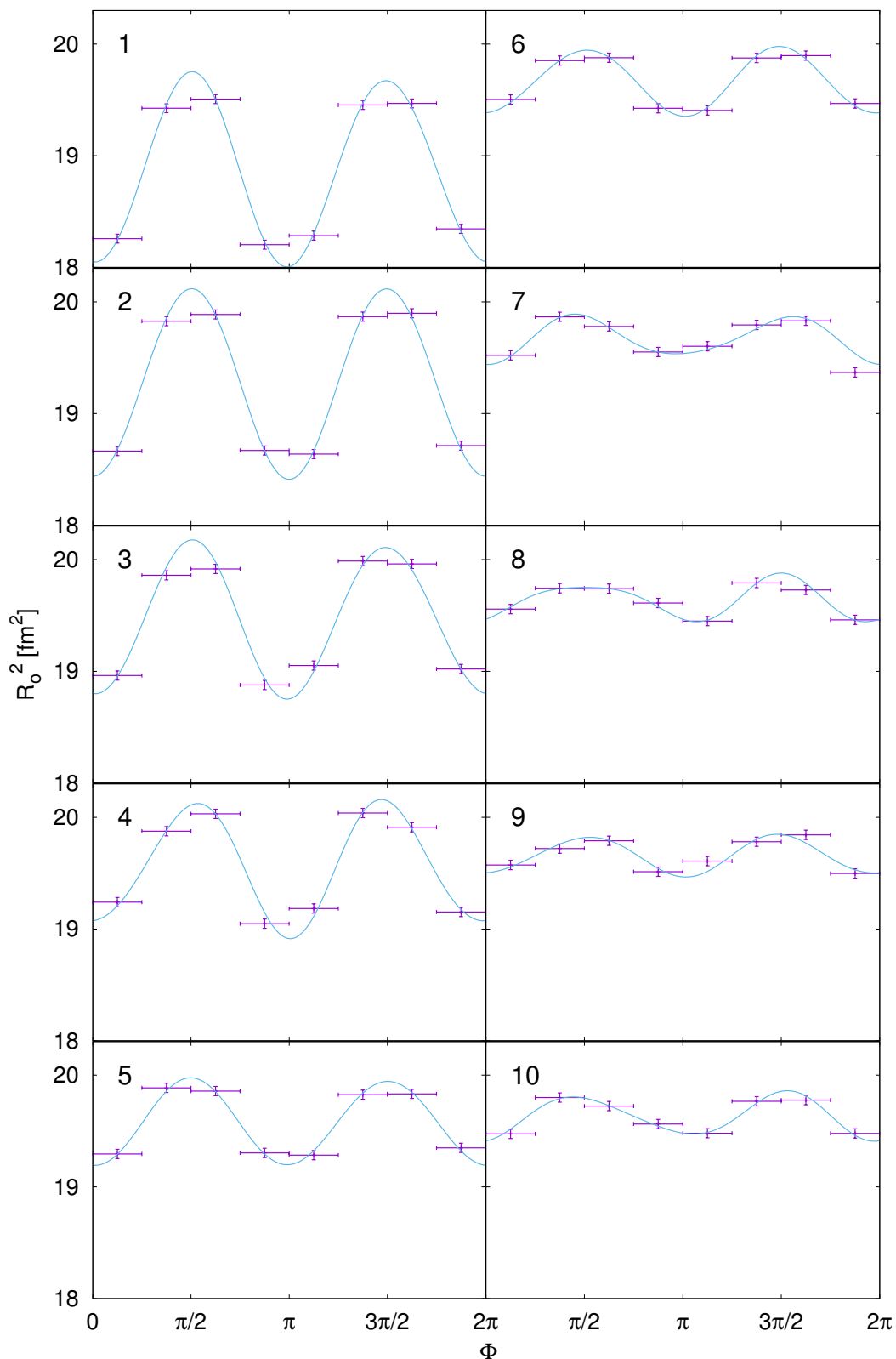
Zostáva nám však ešte určiť korelačné polomery a ich azimutálnu závislosť pre jednotlivé triedy a v nich hľadať anizotropie druhého a tretieho rádu.

5.1 Korelačné polomery v jednotlivých triedach

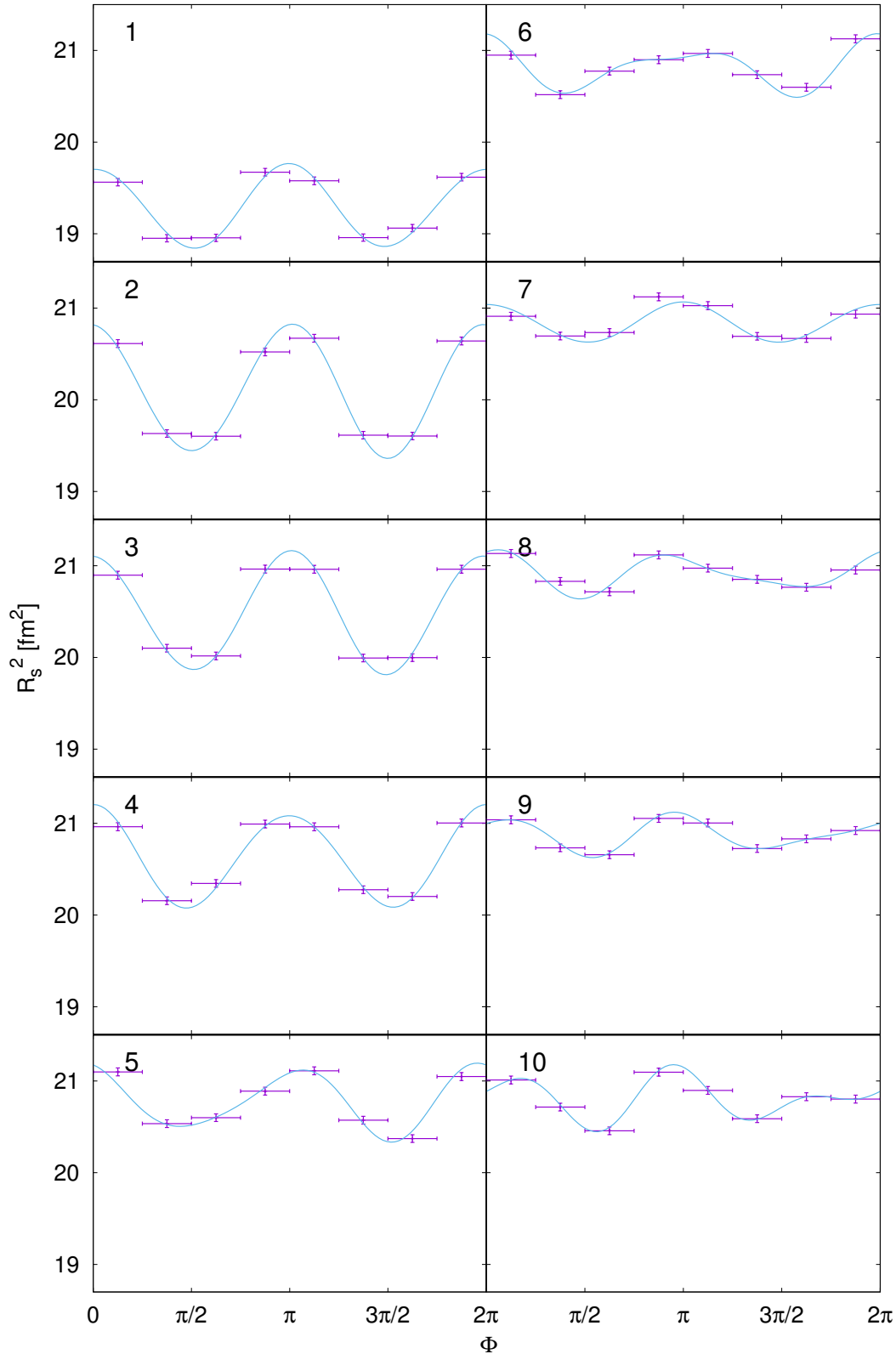
V každej triede sme častice opäť rozdelili do ôsmich uhlových košov a pre každý z nich sme určili korelačnú funkciu pomocou programu CRAB. To nám dáva dokopy 80 výpočtov pre každú vzorku.

Rovnako, ako pri zoradovaní udalostí, sme tentokrát nastavili program CRAB tak, aby bral do úvahy iba častice s $|Y| < 1$. Navyše, tento program automaticky počíta korelácie iba medzi pióňmi. Počet generovaných párov na výpočet korelačnej funkcie sme nechali nastavený na $5 \cdot 10^8$, rovnako ako keď sme určovali korelačnú funkciu nezoradených udalostí. Korelačné polomery sme následne určili nafitovaním korelačnej funkcie gaussovskou funkciou podľa vzťahu (3.1).

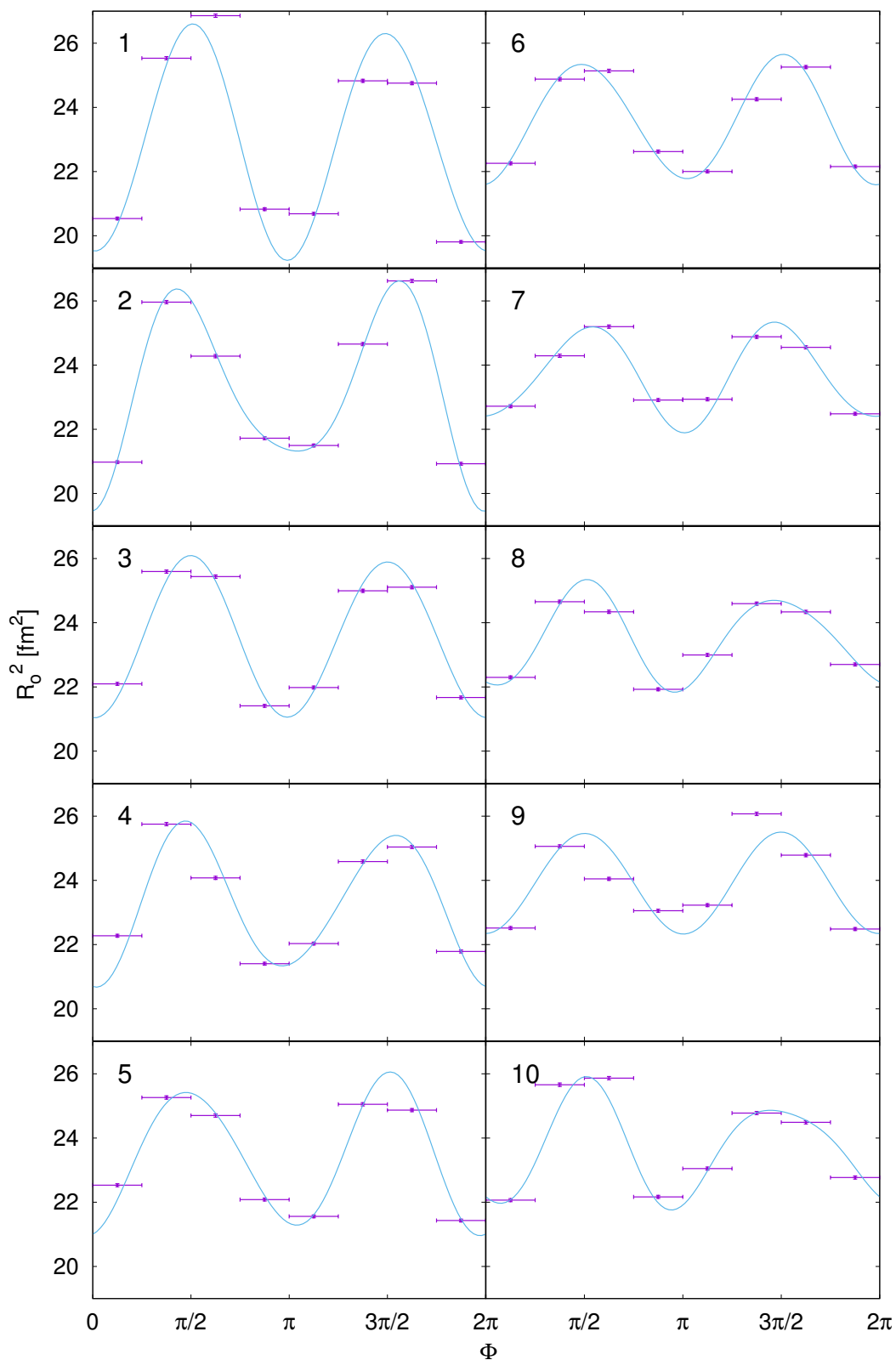
Na obrázkoch 5.1 až 5.6 sú postupne znázornené výsledné azimutálne závislosti korelačných polomerov R_o a R_s pre všetky tri vzorky. Na týchto grafoch je vidno, že rovnako ako pri skúmaní koeficientov v_2 a v_3 v jednotlivých triedach, aj tu v prvých triedach prevláda silná anizotropia druhého rádu. V posledných triedach sú však anizotropie druhého a tretieho rádu podobne veľké a tak je výsledkom kombinácia týchto rádov, ktorú budeme musieť určiť Fourierovou analýzou.



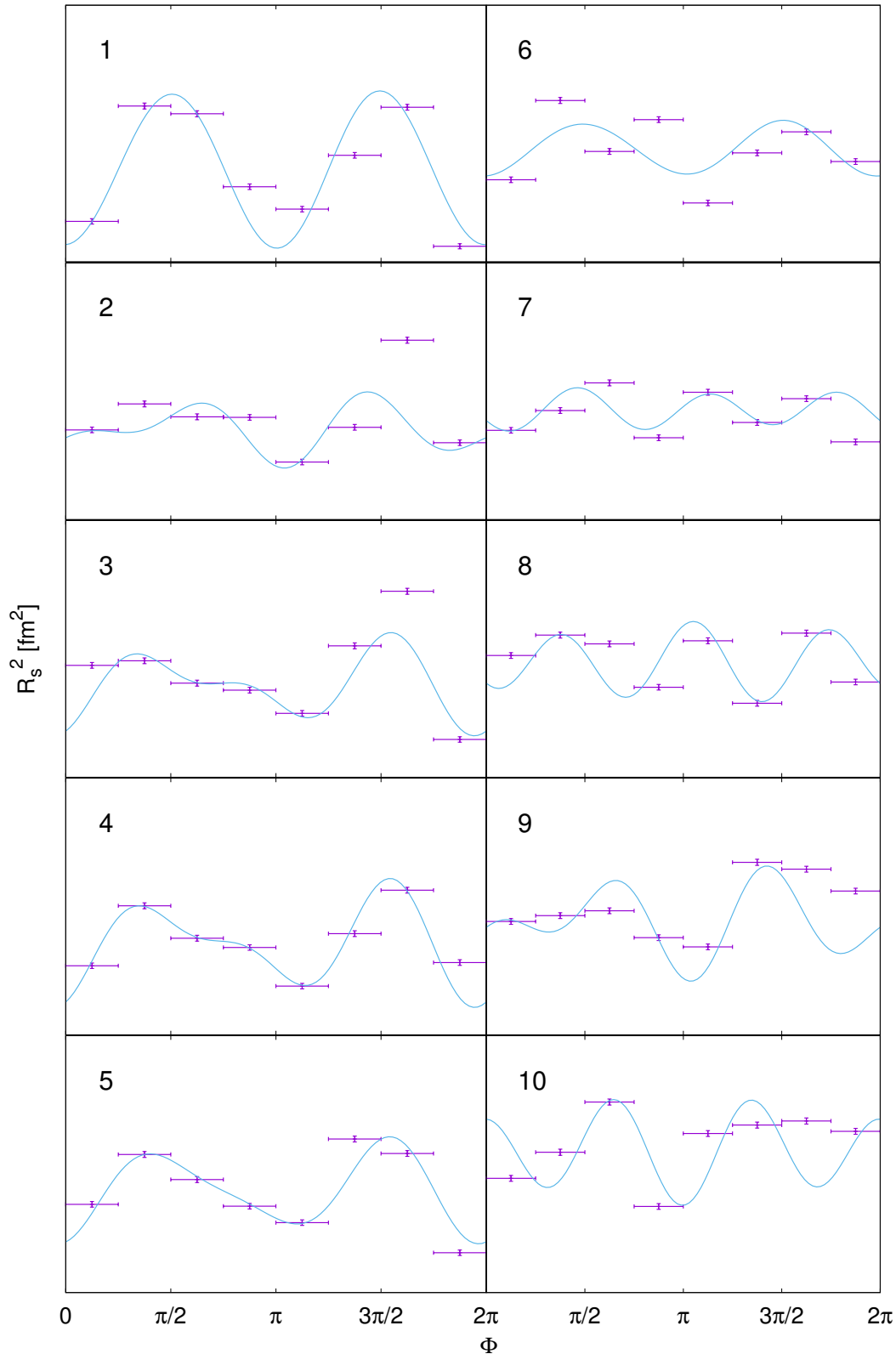
Obr. 5.1: Azimutálna závislosť korelačného polomeru R_o v jednotlivých triedach pre vzorku *DRAGON*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu korelačnej funkcie. Modrou farbou je znázornený fit výsledkov funkciou zo vzťahu (5.1).



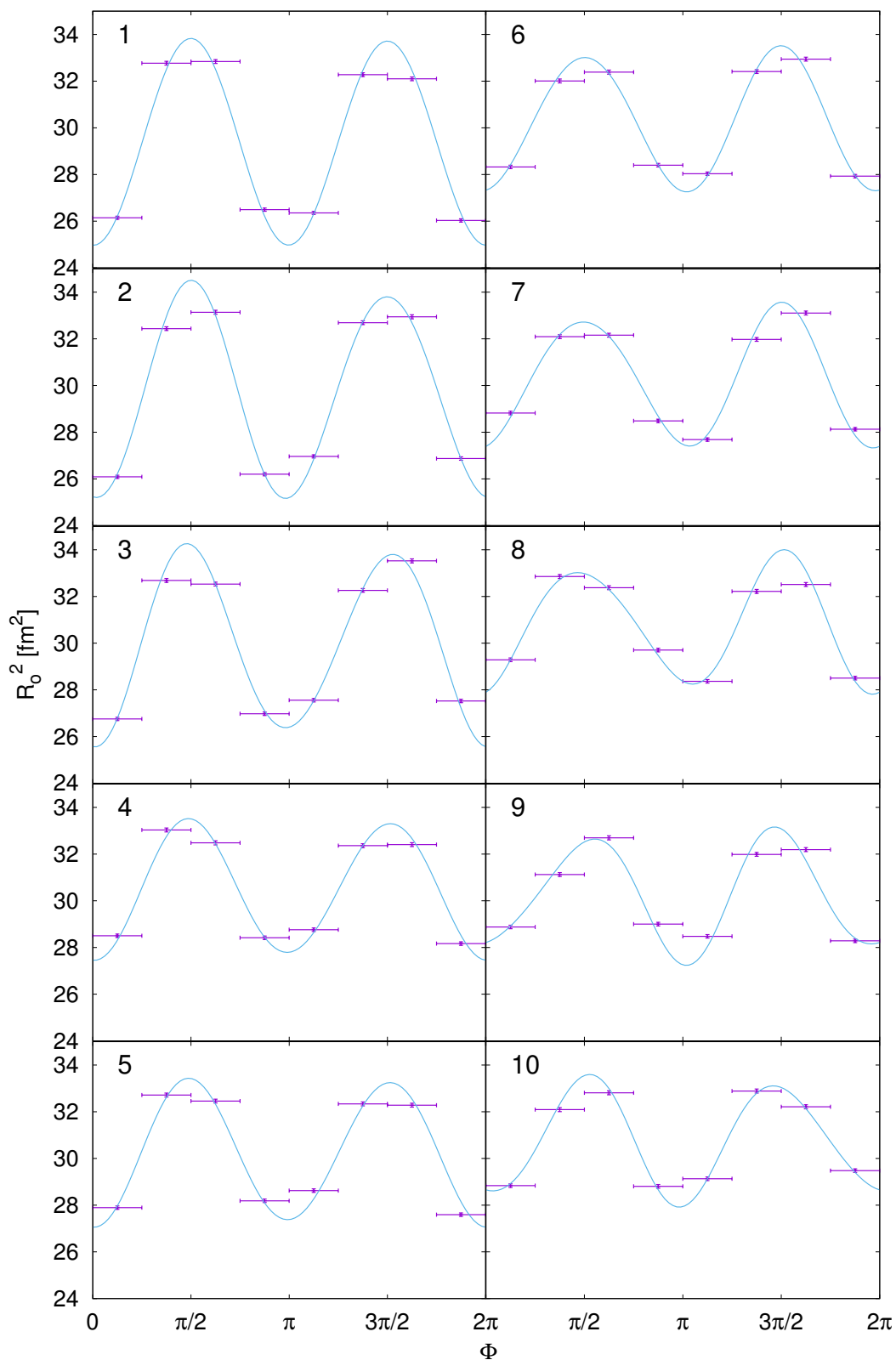
Obr. 5.2: Azimutálna závislosť korelačného polomeru R_s v jednotlivých triedach pre vzorku *DRAGON*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu korelačnej funkcie. Modrou farbou je znázornený fit výsledkov funkciou zo vzťahu (5.1).



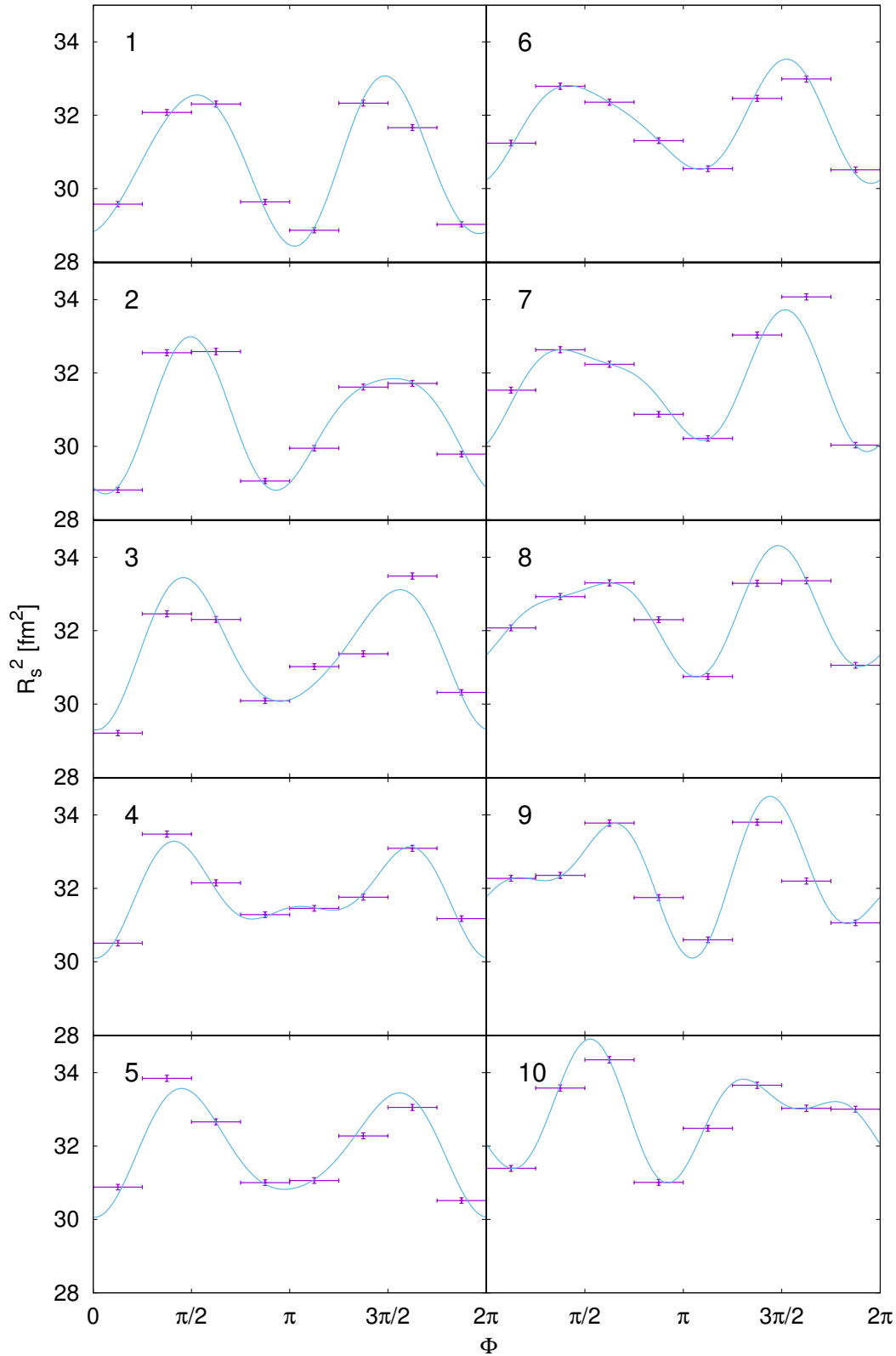
Obr. 5.3: Azimutálna závislosť korelačného polomeru R_0 v jednotlivých triedach pre vzorku *AMPT-RHIC*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu korelačnej funkcie. Modrou farbou je znázornený fit výsledkov funkciou zo vzťahu (5.1).



Obr. 5.4: Azimutálna závislosť korelačného polomeru R_s v jednotlivých triedach pre vzorku *AMPT-RHIC*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu korelačnej funkcie. Modrou farbou je znázornený fit výsledkov funkciou zo vzťahu (5.1).



Obr. 5.5: Azimutálna závislosť korelačného polomeru R_o v jednotlivých triedach pre vzorku *AMPT-LHC*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu korelačnej funkcie. Modrou farbou je znázornený fit výsledkov funkciou zo vzťahu (5.1).



Obr. 5.6: Azimutálna závislosť korelačného polomeru R_s v jednotlivých triedach pre vzorku *AMPT-LHC*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu korelačnej funkcie. Modrou farbou je znázornený fit výsledkov funkciou zo vzťahu (5.1).

5.2 Fourierove koeficienty korelačných polomerov

Rovnako ako pri spektre aj tu nás budú zaujímať koeficienty Fourierovho radu. Korelačné polomery si preto rozvineme do Fourierovho radu

$$R_\mu^2 = (R_\mu^2)_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (R_\mu^2)_n \cos(n(\phi - \delta_n)). \quad (5.1)$$

Aby nás ale neovplyvňovala absolútna veľkosť korelačných polomerov, budú nás zaujímať iba relatívne Fourierove koeficienty, teda koeficienty v tvare $(R_\mu^2)_n/(R_\mu^2)_0$. Tieto koeficienty sme získali nafiťovaním výsledkov na predchádzajúcich obrázkoch. Výsledné Fourierove koeficienty pre všetky vzorky sú znázornené na obrázku 5.7.

Na obrázkoch si opäť môžeme všimnúť niekoľko zaujímavých detailov. V prvom rade vidíme, že anizotropia druhého rádu takmer vo všetkých prípadoch klesá z maximálnej hodnoty¹ na minimálnu. Jedinou výnimkou je R_s pre vzorku *DRAGON*, v ktorej nemáme maximum v triede 1, ale niekde medzi triedami 2 a 3. V prvej triede máme namiesto toho mierny pokles.

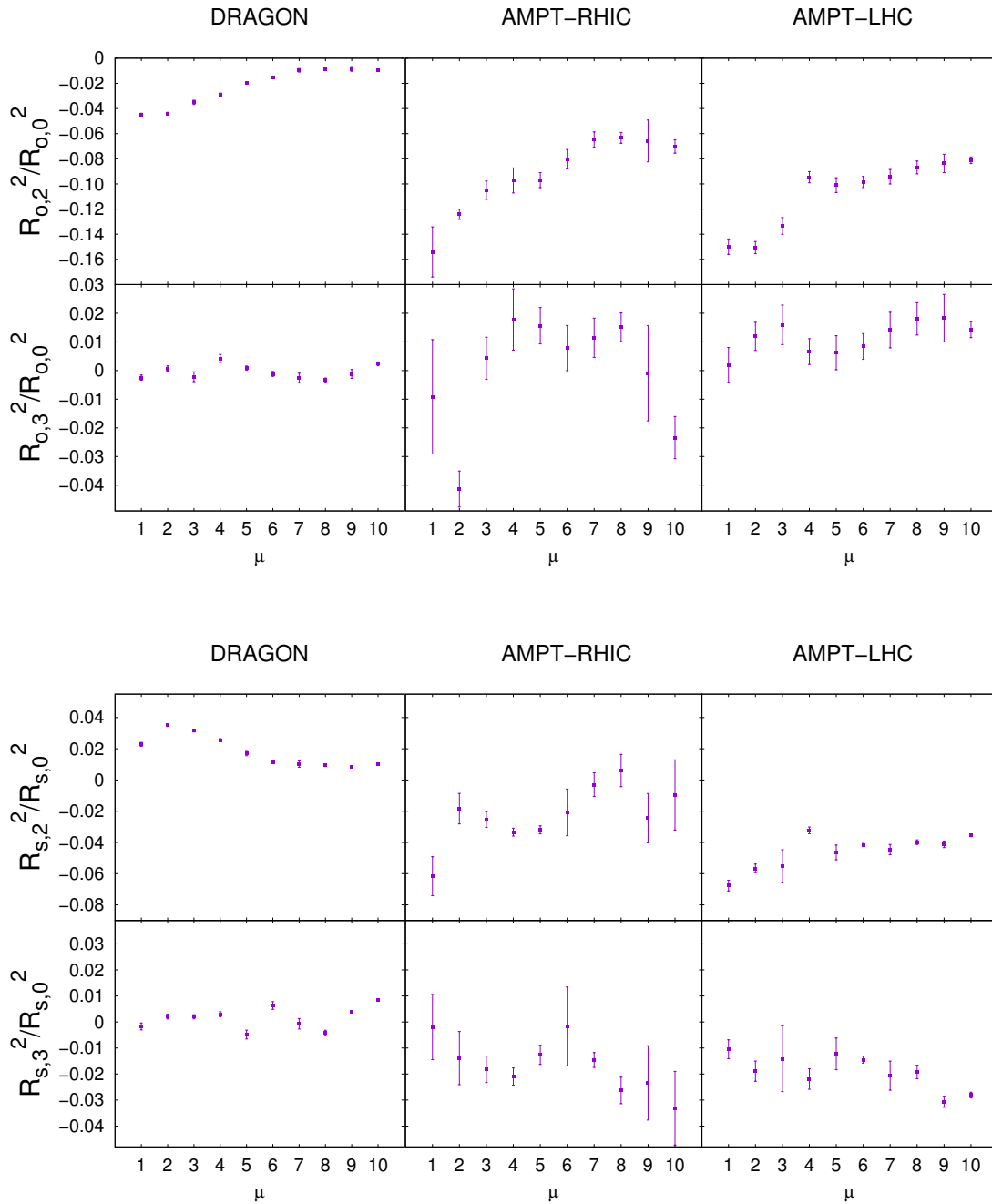
Ďalej si môžeme všimnúť, že zatiaľ čo vzorka *DRAGON* predpokladá polomery R_o a R_s v protifáze, vzorky *AMPT* predpokladajú rovnakú fázu oboch korelačných polomerov. To súhlasí s výsledkami z kapitoly 4.

Zaujímavé je tiež to, že vzorky *AMPT* majú oveľa väčšie chyby fitu, ako zvyšné dve vzorky. To však nie je spôsobené zlou štatistikou, ale nepresnosťou fitu. Keď sa pozrieme na obrázky 5.1 až 5.6, uvidíme, že vzorky *AMPT* majú výsledky, ktoré sa nedajú nafiťovať danou funkciou tak dobre, ako sa dajú nafiťovať výsledky pre vzorku *DRAGON*. K zlepšeniu týchto výsledkov by mohlo pomôcť rozdelenie častíc do väčšieho počtu uhlových košov, čo by však značne zvýšilo výpočtový čas.

Zatiaľ čo Fourierove koeficienty spektra v_2 a v_3 nadobúdali približne rovnaké hodnoty pre všetky vzorky, tu vidíme, že vzorka *DRAGON* má vo všeobecnosti menšie hodnoty koeficientov druhého aj tretieho rádu ako vzorky *AMPT*, ktoré sú si v tomto smere dosť podobné.

Hlavným výsledkom tejto kapitoly je však to, že vďaka zoradeniu udalostí podľa podobnosti sa nám v jednotlivých triedach ukazuje anizotropia druhého a tretieho rádu súčasne. To sme videli už aj na Fourierovom rozklade spektra a opäť to vidíme aj tu pri Fourierovom rozklade korelačných polomerov.

¹máme na mysli absolútnu hodnotu



Obr. 5.7: Relatívne Fourierove koeficienty korelačného polomeru R_o (horný obrázok) a R_s (dolný obrázok) v jednotlivých triedach pre všetky vzorky. V prvom riadku oboch obrázkov je znázornená anizotropia druhého rádu pomocou koeficientu $(R_i^2)_2/(R_i^2)_0$, v druhom riadku anizotropia tretieho rádu vyjadrená cez $(R_i^2)_3/(R_i^2)_0$. V stĺpcoch sú postupne vzorky *DRAGON*, *AMPT-RHIC* a *AMPT-LHC*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v y -ovom smere značí neistotu fitu korelačného polomeru.

Záver

V tejto práci sme sa pozreli na simulované udalosti. Naším hlavným cieľom bola korelačná femtoskopia v triedach podobných udalostí. Vygenerovali sme si udalosti pomocou generátorov udalostí DRAGON a AMPT. Takýmto spôsobom sme si pripravili tri vzorky udalostí:

1. *DRAGON* - 150 000 udalostí vygenerovaných programom DRAGON s parametrami anizotropií $a_2, \rho_2 \in (-0, 1; 0, 1)$ a $a_3, \rho_3 \in (-0, 03; 0, 03)$
2. *AMPT-RHIC* - 10 000 udalostí vygenerovaných programom AMPT s parametrami zrážok $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, $b_{min} = 7$ fm a $b_{max} = 10$ fm, pričom zrážaným nuklidom bolo zlato 197
3. *AMPT-LHC* - 10 000 udalostí vygenerovaných programom AMPT s parametrami zrážok $\sqrt{s_{NN}} = 2760$ GeV, $b_{min} = 7$ fm a $b_{max} = 10$ fm, pričom zrážaným nuklidom bolo olovo 208

Tieto udalosti majú rôzne tvary, medzi ktorými sme sa snažili nájsť navzájom podobné udalosti. Aby sme sa vyhli tomu, že dve podobné udalosti budú len rôzne otočené, otočili sme všetky udalosti jedným smerom, teda tak, aby mali uhol θ_2 nulový.

Takto pootáčané udalosti majú tú vlastnosť, že v súčte sa anizotropia druhého rádu nasčíta, zatiaľ čo anizotropia tretieho rádu sa vyruší. To môžeme veľmi pekne pozorovať, keď určíme azimutálnu závislosť korelačných polomerov. To sme urobili pre všetky tri vzorky. Vo všetkých štyroch prípadoch môžeme vidieť jasnú harmonickú zložku $\cos(2x)$.

Aby sme uvideli aj tretí rád anizotropií, museli sme udalosti zoradiť podľa ich podobnosti. Na to sme využili metódu triedenia udalostí podľa tvaru. Podľa algoritmu opísaného v kapitole 4 sme zoradili udalosti a následne sme ich roztriedili do desiatich tried. V každej triede sa tak nachádzali podobné udalosti. Medzi jednotlivými triedami sa priemerný tvar udalostí menil. To sme mohli pozorovať už určením Fourierových koeficientov spektra častíc. Tam sme videli, ako sa postupne vyvíja anizotropia druhého a tretieho rádu v triedach. Tu sme tiež poprvýkrát videli, že v jednotlivých triedach môžeme pozorovať anizotropiu druhého a tretieho rádu súčasne.

Nakoniec v poslednej kapitole sme v každej triede opäť určili azimutálnu závislosť korelačných polomerov. Na týchto obrázkoch môžeme pekne vidieť, ako sa uhlová

závislosť a teda aj priemerný tvar udalosti a tiež oblasti homogenity mení medzi jednotlivými triedami. Taktiež tu môžeme vidieť aj kombináciu anizotropií druhého aj tretieho rádu na jednom grafe.

Ako sme ukázali, triedenie udalostí podľa tvaru otvára cestu smerom ku femtoskopii jednotlivých udalostí. Pokiaľ totiž dokážeme udalosti zoradiť tak, aby boli vedľa sebe veľmi podobné udalosti, dokážeme vyberať páry častíc, ktoré budú z takmer rovnakej udalosti, no napriek tomu nebudú korelované, pretože budú z rôznych udalostí. Práve takéto páry potrebujeme pre normalizáciu korelačnej funkcie.

Literatúra

- [1] J. Adams et al, *Azimuthally Sensitive Hanbury Brown–Twiss Interferometry in Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV*. Physical Review Letters 93, 012301 (2004).
- [2] B. Tomášik, *Disentangling spatial and flow anisotropy*. Acta Physica Polonica B 36, 2087 (2005).
- [3] R. Rapp a H. van Hees, *Heavy Quark Diffusion as a Probe of the Quark-Gluon Plasma*.
- [4] B. Alver a G. Roland, *Collision geometry fluctuations and triangular flow in heavy-ion collisions*. Physical Review C 81, 054905 (2010).
- [5] B. Alver, *Initial geometry fluctuations and Triangular flow*. Glasma Workshop (2010).
- [6] B. Tomášik, *DRAGON: Monte Carlo generator of particle production from a fragmented fireball in ultrarelativistic nuclear collisions*. Computer Physics Communications 180, 1642 (2009).
- [7] L. Garrener et al, *44. Monte Carlo Particle Numbering Scheme* (2017); [online] <http://pdg.lbl.gov/2017/reviews/rpp2017-rev-monte-carlo-numbering.pdf>.
- [8] Z. Lin et al, *A Multi-Phase Transport Model for Relativistic Heavy Ion Collisions*. Physical Review C 72, 064901 (2005).
- [9] X. N. Wang, *Role of multiple minijets in high-energy hadronic reactions*. Physical Review D 43, 104 (1991).
- [10] X. N. Wang a M. Gyulassy, *HIJING: A Monte Carlo model for multiple jet production in pp, pA, and AA collisions*. Physical Review D 44, 3501 (1991).
- [11] X. N. Wang a M. Gyulassy, *Systematic study of particle production in p + p(\bar{p}) collisions via the HIJING model*. Physical Review D 45, 844 (1992).
- [12] M. Gyulassy a X. N. Wang, *HIJING 1.0: A Monte Carlo program for parton and particle production in high energy hadronic and nuclear collisions*. Computer Physics Communications 83, 307 (1994).

- [13] B. Zhang, *ZPC 1.0.1: a parton cascade for ultrarelativistic heavy ion collisions*. Computer Physics Communications 109, 193 (1998).
- [14] B. Andersson, G. Gustafson a B. Soderberg, *Baryon Production in Jet Fragmentation and γ -Decay*. Zeitschrift für Physik C 20, 317 (1983).
- [15] B. Andersson, G. Gustafson, G. Ingelman a T. Sjostrand, *Parton fragmentation and string dynamics*. Physics Reports 97, 31 (1983).
- [16] T. Sjostrand, *High-energy-physics event generation with PYTHIA 5.7 and JETSET 7.4*. Computer Physics Communications 82, 74 (1994); <http://www.thep.lu.se/tf2/staff/torbjorn/Pythia.html>.
- [17] B. A. Li a C. M. Ko, *Formation of superdense hadronic matter in high energy heavy-ion collisions*. Physical Review C 52, 2037 (1995).
- [18] B. Li, A. T. Sustich, B. Zhang a C. M. Ko, *Studies of superdense hadronic matter in a relativistic transport model*. International Journal of Modern Physics E 10, 267 (2001).
- [19] S. Pratt, *Correlation After Burner*. [online] <http://www.pa.msu.edu/pratts/freecodes/crab/home.html>
- [20] J. Schukraft, A. Timmins, S. A. Voloshin, *Ultra-relativistic nuclear collisions: Event shape engineering*. Physics Letters B 719, 394 (2013).
- [21] R. Kopečná a B. Tomášik, *Event shape sorting*. European Physical Journal A 52, 16115 (2016).
- [22] S. A. Bass et al, *Microscopic Models for Ultrarelativistic Heavy Ion Collisions*. Progress in Particle and Nuclear Physics 41, 225 (1998)
- [23] W. Florkowski, *Phenomenology of Ultra-Relativistic Heavy-Ion Collisions*. World Scientific, 2010. ISBN 978-981-4280-66-2.
- [24] U. A. Wiedemann, *Two-particle interferometry for noncentral heavy-ion collisions*. Physical Review C 57, 266 (1998).
- [25] C. Plumberg a U. Heinz, *Probing the properties of event-by-event distributions in Hanbury-Brown-Twiss radii*. Physical Review C 92, 044906 (2015).
- [26] T. Csörgő, S. Hegyi a W. A. Zajc, *Bose-Einstein correlations for Levy stable source distributions*. European Physical Journal C 36, 67 (2004).
- [27] C. Plumberg a U. Heinz, *HoTCoffeeh: Hanbury Brown-Twiss correlation functions and radii from event-by-event hydrodynamics*. arXiv:1611.03161.