

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra fyziky

Diplomová práce

Ustředňování přes události a seřazení
událostí podle tvaru očima femtoskopie

Bc. Jakub Cimerman

Vedoucí práce: Doc. Dr. Boris Tomášik

Praha, 2018

CZECH TECHNICAL UNIVERSITY IN PRAGUE

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering

Department of Physics

Master's thesis

**Event averaging and event-shape sorting as
seen by femtoscopy**

Bc. Jakub Cimerman

Supervisor: Doc. Dr. Boris Tomášik

Prague, 2018

Prehlásenie

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu vypracoval samostatne a použil som iba podklady (literatúru, projekty, SW atď) uvedené v priloženom zozname.

Nemám závažný dôvod proti použitiu tohoto školského diela v zmysle § 60 Zákona č. 121/200 Sb., o práve autorskom, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonov (autorský zákon).

V Prahe dňa

.....

podpis

Názov práce:

Ustředňování přes události a seřazení událostí podle tvaru očima femtoskopie

Autor: Bc. Jakub Cimerman

Odbor: Experimentální jaderná a částicová fyzika

Druh práce: Diplomová práce

Vedúci práce: Doc. Dr. Boris Tomášik, Katedra fyziky, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, České vysoké učení technické v Praze

Abstrakt: Už niekoľko desiatok rokov skúmajú vedci vo svetových laboratóriách zrážky atómových jadier pri vysokých energiách. Jedným z ich cieľov je skúmanie kvarkovo-gluónovej plazmy, ktorá pri týchto zrážkach vzniká. Po zrážke sa plazma postupne mení na plyn hadrónov nazývaný horúca hmota. Táto horúca hmota však nie je homogénna a expanduje nerovnomerne kvôli nehomogenitám v počiatočnom rozdelení hustoty energie. To má za následok merateľnú anizotropiu produkcie hadrónov.

Okrem samotného spektra anizotropia ovplyvňuje aj dvojčasticové korelácie v relatívnej hybnosti. V prvej časti tejto práce sa zaoberáme tým, ako priemerovanie cez veľké množstvo udalostí ovplyvňuje tvar pozorovanej korelačnej funkcie.

V druhej časti sme sa zamerali na korelačné polomery simulovaných udalostí. Udalosti sme zoradili podľa ich podobnosti a skúmali sme azimutálnu závislosť korelačných polomerov v malých triedach udalostí, ktoré sa navzájom líšia tvarom. Táto metóda je opísaná a ukázaná na udalostiach simulovaných niekoľkými generátormi udalostí.

Kľúčové slová: Kvark-gluónová plazma, Blast-wave model, korelačná femtoskopia, ustredňovanie udalostí, triedenie udalostí podľa tvaru

Title:

Event averaging and event-shape sorting as seen by femtoscopy

Author: Bc. Jakub Cimerman

Abstract: Scientists in world laboratories investigate high energy collisions of atomic nuclei for several decades. One of their objectives is the research of quark-gluon plasma, which is created in these collisions. After collision, plasma changes into a gas of hadrons. The hot drop of matter is customarily called fireball. This fireball isn't homogeneous and expands anisotropically due to inhomogeneities of the initial energy density distribution. This leads to measurable anisotropy of produced hadrons.

Anisotropies also affect the two-particle correlations in relative momentum. In the first part of this work we investigate how averaging over a large number of events influences the shape of the observed correlation function.

In the second part we focus on correlation radii of simulated events. We sort events according to their similarity and investigate the azimuthal dependence of the correlation radii within events classes which differ in shape. The method is explained and demonstrated on events simulated with various event generators.

Key words: Quark-gluon plasma, Blast-wave model, correlation femtoscopy, events averaging, event shape sorting

Pod'akovanie:

Touto cestou by som sa chcel poďakovať Doc. Dr. Borisovi Tomášikovi za jeho pomoc, odborné vedenie, cenné rady a pripomienky pri vypracovaní mojej diplomovej práce a tiež za veľmi príjemnú spoluprácu, ktorá ma veľa naučila.

Ďalej by som sa chcel poďakovať Lucii Marcinekovej za neustálu podporu a trpezlivosť pri písaní tejto práce. Poďakovanie patrí aj mojim spolužiakom Bc. Radke Sochorovej a Bc. Lukášovi Holubovi za ich pomoc a cenné rady.

Obsah

Zoznam obrázkov	xii
Zoznam použitých skratiek, značiek a konštánt	xiii
Úvod	1
1 Horúca hmota	5
1.1 Voľba súradníc	5
1.2 Smer expanzie	6
1.3 Emisná funkcia	8
1.4 Blast-wave model	8
1.5 Anizotropie v blast-wave modeli	10
1.5.1 Priestorová anizotropia	11
1.5.2 Expanzná anizotropia	11
2 Korelačná femtoskopia	15
2.1 Korelačná funkcia	15
2.2 HBT polomery	17
3 Emisné funkcie rôznych zdrojov	19
3.1 Gaussovská emisná funkcia	19
3.1.1 Ustredňovanie cez veľkosť zdroja	22
3.1.2 Ustredňovanie cez uhol natočenia	24
3.2 Ustredňovanie v Blast-wave modeli	28
3.2.1 Ustredňovanie cez uhol natočenia	28
3.2.2 Ustredňovanie cez priečnu hybnosť	30
4 Simulácia produkcie častíc	35
4.1 Generátory udalostí	35
4.1.1 DRAGON	35
4.1.2 AMPT	36
4.1.3 UrQMD	38

4.2	Počítanie korelačných funkcií	38
4.3	Azimutálna závislosť korelačných polomerov	39
5	Triedenie udalostí podľa tvaru	47
5.1	Algoritmus	48
5.2	Výsledky triedenia	49
6	Korelačná femtoskopia podobných udalostí	57
6.1	Korelačné polomery v jednotlivých triedach	57
6.2	Fourierove koeficienty korelačných polomerov	66
	Záver	69
	Literatúra	71
	Dodatok A	75
	Dodatok B	77

Zoznam obrázkov

1	Analógia medzi veľkým treskom a zrážkou jadier	2
1.1	Rozdiel medzi uhlami	7
1.2	Vznik anizotropie druhého rádu	10
1.3	Vznik anizotropie tretieho rádu	11
1.4	Horúca hmota s priestorovou anizotropiou	12
1.5	Horúca hmota s expanznou anizotropiou	13
1.6	Kombinácia priestorovej a expanznej anizotropie	14
2.1	Vzťah <i>out-side-long</i> súradníc ku klasickým súradniciam	17
3.1	Nákres emisnej funkcie s vyznačenými polosami	20
3.2	Hustota pravdepodobnosti polomerov horúcej hmoty	21
3.3	Hustota pravdepodobnosti zrážkového parametra podľa Glauberovho modelu. Prevzaté z [9].	22
3.4	Ustrednená korelačná funkcia rovnomerného rozdelenia	23
3.5	Ustrednená korelačná funkcia nerovnomerného rozdelenia	24
3.6	Uhlovo ustrednené korelačné funkcie	25
3.7	Gaussovský fit korelačných funkcií	26
3.8	Lévy fit korelačných funkcií	27
3.9	Gaussovský fit korelačných funkcií blast-wave modelu s uhlovým ustrednením	29
3.10	Neustrednená vs. ustrednená korelačná funkcia cez azimut	30
3.11	Hybnostné spektrum Blast-wave modelu	31
3.12	Gaussovský fit korelačných funkcií blast-wave modelu s hybnostným ustrednením	32
3.13	Neustrednená vs. ustrednená korelačná funkcia cez hybnosť	33
4.1	Podobnosť rôzne natočených udalostí	40
4.2	Azimutálna závislosť HBT polomerov pre <i>DRAGON</i>	42
4.3	Azimutálna závislosť HBT polomerov pre <i>URQMD</i>	43
4.4	Azimutálna závislosť HBT polomerov pre <i>AMPT-RHIC</i>	44

4.5	Azimutálna závislosť HBT polomerov pre <i>AMPT-LHC</i>	45
4.6	Závislosť pomeru R_o^2/R_s^2 od p_t	46
5.1	Priemerný tvar zoradených udalostí pre <i>DRAGON</i>	50
5.2	Priemerný tvar zoradených udalostí pre <i>URQMD</i>	51
5.3	Priemerný tvar zoradených udalostí pre <i>AMPT-RHIC</i>	51
5.4	Priemerný tvar zoradených udalostí pre <i>AMPT-LHC</i>	52
5.5	Závislosť v_2 a v_3 priemernej udalosti od μ	53
5.6	Závislosť v_2 a v_3 všetkých udalostí od μ	55
6.1	Azimutálna závislosť R_o v triedach pre <i>DRAGON</i>	58
6.2	Azimutálna závislosť R_s v triedach pre <i>DRAGON</i>	59
6.3	Azimutálna závislosť R_o v triedach pre <i>URQMD</i>	60
6.4	Azimutálna závislosť R_s v triedach pre <i>URQMD</i>	61
6.5	Azimutálna závislosť R_o v triedach pre <i>AMPT-RHIC</i>	62
6.6	Azimutálna závislosť R_s v triedach pre <i>AMPT-RHIC</i>	63
6.7	Azimutálna závislosť R_o v triedach pre <i>AMPT-LHC</i>	64
6.8	Azimutálna závislosť R_s v triedach pre <i>AMPT-LHC</i>	65
6.9	Fourierove koeficienty R_o v triedach	67
6.10	Fourierove koeficienty R_s v triedach	68

Zoznam použitých skratiek, značiek a konštant

SPS	Super Proton Synchrotron
CERN	Európska organizácia pre jadrový výskum
AGS	Alternating Gradient Synchrotron
BNL	Brookhaven National Laboratory
RHIC	Relativistic Heavy Ion Collider
LHC	Large Hadron Collider
HBT	Hanbury Brown & Twiss
DRAGON	DRoplet and hAdron GeneratOr for Nuclear collisions
AMPT	A Multi-Phase Transport Model
HIJING	Heavy Ion Jet Interaction Generator
ZPC	Zhang's Parton Cascade
ART	A Relativistic Transport Model
UrQMD	UltraRelativistic Quantum Molecular Dynamics
CRAB	CoRrelation After Burner
ESSTER	Event Shape SorTER

MeV	megaelektrónvolt ($1 \text{ MeV} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$)
fm	femtometer
p_t	priečna hybnosť
m_t	priečna hmotnosť
Y	pozdĺžna rapidita
x^μ	štvorvektor polohy
u^μ	štvorvektor rýchlosti
p^μ	štvorvektor hybnosti
τ	pozdĺžny vlastný čas
η	časopriestorová rapidita
ϕ	uhol, pod ktorým sledujeme emisiu hadrónov
θ	polárny uhol

θ_b	uhol kolmý na povrch horúcej hmoty
E^*	energia meraná v pokojovej sústave
T	teplota vymrznutia
ρ	priečna rapidita
τ_0	vlastný čas vymrznutia
$\Delta\tau$	rozptyl vlastného času vymrznutia
$d\Sigma_\mu$	element trojrozmernej nadplochy horúcej hmoty
R_0	základný polomer horúcej hmoty
\bar{r}	efektívny priečny polomer horúcej hmoty
a_n	parametre priestorovej anizotropie
ρ_n	parametre expanznej anizotropie
θ_n	parametre rotácie anizotropií
$P(p_t, \phi)$	jednočasticové hybnostné spektrum
$P_2(p_1, p_2)$	dvojčasticové hybnostné spektrum
$S(x, p)$	emisná funkcia
v_n	koefficienty Fourierovho rozvoja hybnostného spektra
$C(q, K)$	korelačná funkcia
R_μ^2	korelačné polomery

Úvod

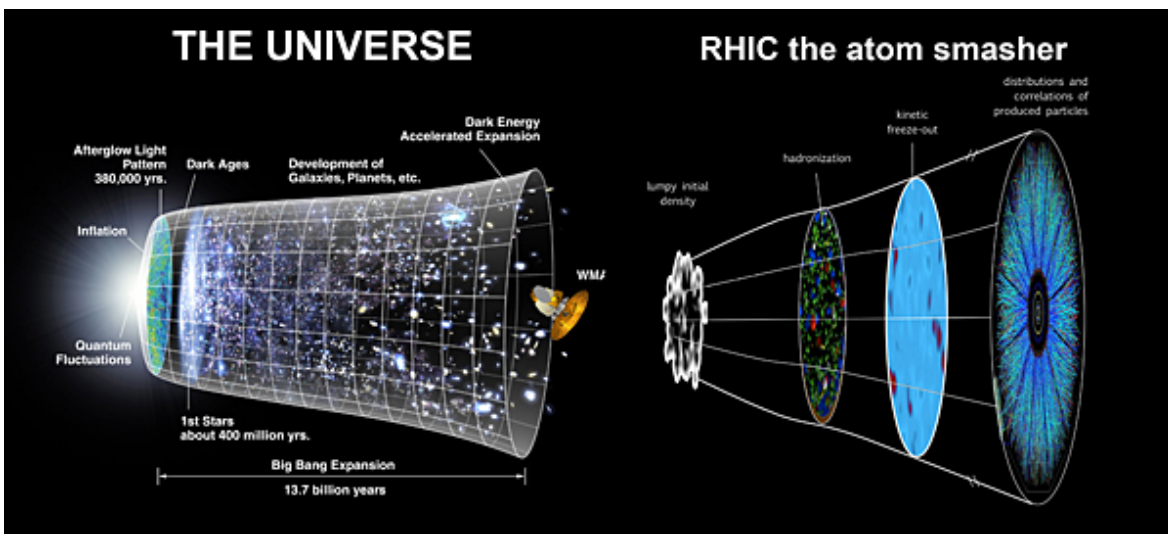
Určiť zloženie hmoty je jednou zo základných úloh fyziky. Vedcom sa už podarilo dokázať, že sa hmota skladá z atómov, tie sa ďalej skladajú z hadrónov a leptónov a hadróny sa skladajú z kvarkov. Za normálnych podmienok sa kvarky zoskupujú do dvojíc v mezónoch alebo do trojíc v baryónoch. V mezónoch a baryónoch sú kvarky udržiavané silnou interakciou, ktorá je sprostredkovaná gluónmi. Väzbová energia tejto interakcie je taká silná, že na oddelenie kvarku z hadrónu by sme museli dodať energiu prevyšujúcu pokojovú energiu dvojice kvark-antikvark. To spôsobuje, že pri pokuse odtrhnúť kvark z hadrónu by sme dostali dva hadróny. Kvarky preto nemôžeme pozorovať ako voľné častice.

Keď priblížime dva hadróny k sebe dostatočne blízko, silná interakcia začne pôsobiť aj medzi kvarkami dvoch rôznych hadrónov. V takom prípade silná interakcia prevýši prípadnú Coulombickú silu a hadróny sa tak môžu zoskupovať do atómových jadier. Pri veľmi vysokých tlakoch a teplotách je ale hustota hadrónov tak vysoká, že rôzne kvarky začnú priamo rozlišovať iné kvarky, ktoré pochádzajú z iných hadrónov, a vznikne plyn oslobodených kvarkov a gluónov. V takomto plyne kvark interaguje so všetkými ďalšími kvarkami v najbližšom okolí, no zároveň sa môže v tomto plyne pohybovať, pretože už nie je viazaný na konkrétny hadrón. Takéto skupenstvo látky nazývame kvarkovo-gluónová plazma. Pre fyziku je dôležitá najmä kvôli tomu, že tvorila vesmír pár milisekúnd po Veľkom tresku.

Teóriu o kvarkovo-gluónovej plazme priniesli teoretici v roku 1975. V 80. rokoch 20. storočia tak začali experimenty, ktoré mali dokázať existenciu tejto fázy. Ako prví sa o to pokúšali vedci na urýchľovači Bevalac v meste Berkeley. Nepodarilo sa im ale vytvoriť dostatočne veľkú energiu pre vznik plazmy. Neskôr sa o to úspešnejšie pokúšali na urýchľovačoch SPS v CERN-e a AGS v laboratóriu BNL. Po získaní dostatočného množstva dát mohli vedci z CERN-u oficiálne vyhlásiť kvarkovo-gluónovú plazmu za objavenú v roku 2000. Ďalšie experimenty, v ktorých sa vedci snažia získať nové informácie, prebiehajú dodnes na urýchľovačoch RHIC v USA a LHC vo Švajčiarsku. V týchto experimentoch sa vedci snažia zistiť niečo viac o vlastnostiach plazmy.

Ultrarelativistické zrážky

A ako sa vlastne takáto plazma hľadá? Kvarkovo-gluónová plazma vznikla v dôsledku Veľkého tresku. Preto ak ju chceme vytvoriť, musíme vytvoriť akýsi malý tresk, v ktorom budú podmienky aspoň trochu porovnateľné s tými pri vzniku vesmíru. Preto staviame obrovské urýchľovače častíc. V laboratóriách urýchlime jadrá ťažkých prvkov (napr. ^{208}Pb alebo ^{197}Au) na rýchlosti tak blízke rýchlosti svetla, že sa pokojová energia týchto prvkov stáva zanedbateľnou oproti celkovej energii. Takéto rýchlosti nazývame ultrarelativistické. Energie pri tom môžu dosahovať hodnoty od niekoľkých GeV až po 5,02 TeV/nukleón¹. Keď necháme dva takéto zväzky ťažkých jadier aby sa zrazili, môže vzniknúť hmota s hustotou energie dostatočnou pre vznik plazmy.



Obr. 1: Analógia medzi veľkým treskom a expanziou kvarkovo-gluónovej plazmy z jadrovej zrážky. Prevzaté z [1].

A ako vieme, že nám pri zrážke plazma vznikla? To, že sme pri zrážke plazmu skutočne našli, nám prezradilo meranie potlačenia jetov. Jety sú prúdy častíc, ktoré vychádzajú zo zrážky v tvare kužeľa. V prípade, že plazma pri zrážke vznikla, bude interagovať s prvotnými tvrdými partónmi, čo vedie k strate ich energie. Táto strata energie sa prejavuje v potlačení jetov. Kľúčovým pozorovaním bolo meranie uhlových korelácií produkovaných hadrónov na STARe. Zo zákona zachovania hybnosti vyplýva, že jety musia byť vždy v pároch oproti sebe. Meranie však ukázalo, že k jetom chýbali ich partneri na druhej strane, ktoré boli potlačené, čo nám dokazuje existenciu kvarkovo-gluónovej plazmy.

Pri zrážkach častíc pri najvyšších dosiahnuteľných energiách teda dochádza ku vzniku kvarkovo-gluónovej plazmy. Tá sa v dôsledku obrovskej hustoty energie postupne roz-pína a chladne. Keď jej hustota energie klesne pod určitú hranicu, kvarky sa už budú

¹Toto je horná hranica energie na LHC.

nachádzať príliš ďaleko od seba na to, aby na seba pôsobili všetky a aby sa mohli správať ako voľné. Plazma ako taká prestane existovať, kvarky sa začnú s najbližšími kvarkami okolo seba zhlukovať naspäť do hadrónov a vznikne plyn hadrónov. Tento proces sa nazýva hadronizácia. Kým je hustota energie ešte dosť vysoká, hadróny sa nachádzajú dosť blízko seba na to, aby na seba pôsobili silnou interakciou. Horúca hmota sa ďalej rozpína a chladne, až pokým sa hadróny nedostanú z pôsobenia silnej interakcie. Vtedy začnú byť z horúcej hmoty emitované. Tento proces nazývame vymrznutie.

Experimenty ukazujú, že pri zrážkach vznikajú anizotropie v priečnom reze zrážky. Produkcia hadrónov preto závisí od azimutálneho uhla. To dokazuje, že sa v horúcej hmote po zrážke nachádzajú nehomogenity v rozdelení energie. Tie sú dôsledkom najmä necentrálnych zrážok ale tiež rozloženia nukleónov v jadrách. Nehomogenity spôsobujú gradient tlaku v horúcej hmote a teda tiež kolektívny pohyb hmoty. Vytvorením hydrodynamickej simulácie a porovnaním jej výsledkov s experimentom môžeme určiť tlak v hmote. Tlak je previazaný s hustotou energie v stavovej rovnici a jeho určením by sme tak mohli nájsť stavovú rovnicu.

V prvej kapitole tejto práce bližšie vysvetlíme pojmy súvisiace s horúcou hmotou, ako sú emisná funkcia, blast-wave model a tiež ukážeme, ako sú parametrizované anizotropie. V druhej kapitole vysvetlíme, čo je to korelačná funkcia a ako súvisí s veľkosťou horúcej hmoty. V tretej kapitole sa pozrieme na to, aký tvar bude mať korelačná funkcia, ktorá vznikne ustrednením rôzne veľkých a rôzne natočených gaussovských emisných funkcií. V štvrtej kapitole opíšeme, aké generátory používame na generovanie udalostí a ukážeme, ako vyzerá azimutálna závislosť korelačných polomerov udalostí natočených rovnakým smerom. V poslednej kapitole budeme triediť udalosti podľa tvaru a počítať korelačné funkcie z malých tried udalostí, aby sme boli schopní vidieť viac rádoz anizotropií súčasne.

Keďže sa jedná o prácu v oblasti relativity a jadrovej fyziky, budeme v nej používať pre zjednodušenie prirodzenú sústavu jednotiek $c = \hbar = k_B = 1$. V tejto sústave majú hmotnosť, hybnosť, energia a teplota rovnaký fyzikálny rozmer, ktorý budeme uvažovať v jednotkách MeV. Z prirodzenej sústavy jednotiek tiež vyplýva, že čas má rovnaký fyzikálny rozmer ako dĺžka, a obe veličiny budeme počítať v jednotkách fm. Zároveň platí vzťah prepájajúci tieto fyzikálne rozmery, ktorý vyplýva z toho, že $\hbar c = 1$ a tiež $\hbar c = 197,3 \text{ MeV}\cdot\text{fm}$. Platí teda

$$1\text{fm} = \frac{1}{197,3 \text{ MeV}}.$$

Kapitola 1

Horúca hmota

Pri ultrarelativistických jadrových zrážkach dochádza k fázovému prechodu za vzniku kvarkovo-gluónovej plazmy. Tá postupne chladne, rozpína sa a kvarky sa znovu združujú do hadrónov v procese zvanom hadronizácia. Tento hadrónový plyn nazývame horúca hmota¹.

Z horúcej hmoty sú následne emitované hadróny a tie sú detekované na detektoroch. Rozdelenie hadrónov v koncovom stave je dané emisnou funkciou. Z nej dokážeme vypočítať hybnostné spektrum detekovaných častíc a to porovnávať s experimentálnymi výsledkami. Predtým, než si o emisnej funkcii povieme viac, musíme si zaviesť vhodný súradnicový systém.

1.1 Voľba súradníc

Pri zrážkach častíc je zvykom označovať smer zväzku jadier ako os z . Tento smer nazývame longitudinálny alebo pozdĺžny. Priečny rez zrážky tvorí rovinu kolmú na os z , ktorú nazývame transverzálnou (priečnou). V tejto rovine máme definované osy x a y . Niekedy budeme tieto osi značiť pomocou indexov $x_1 = x$, $x_2 = y$ a $x_3 = z$. Predmetom nášho záujmu je anizotropia v priečnej rovine, preto má zmysel zdefinovať si priečnu hybnosť a s ňou súvisiacu priečnu hmotnosť

$$p_t = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} \quad (1.1a)$$

$$m_t = \sqrt{m^2 + p_t^2}. \quad (1.1b)$$

Pri ultrarelativistických rýchlostiach je vhodné zdefinovať si veličinu, ktorá opisuje rýchlosť efektívne. Klasická rýchlosť sa totiž v blízkosti jednotky už takmer nemení, pričom energia častice neustále rastie. Veličinou, ktorá rýchlosť popisuje lepšie je pozdĺžna rapidita

$$Y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_3}{E - p_3} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + v_3}{1 - v_3} \right). \quad (1.2)$$

¹v angličtine *fireball*

Rapidita má ešte jednu užitočnú vlastnosť, a to že sa pri Lorentzových transformáciách mení iba o konštantu. Pomocou rapidity môžeme napísať štvorvektor hybnosti v tvare

$$p^\mu = (m_t \cosh Y, p_t \cos \phi, p_t \sin \phi, m_t \sinh Y). \quad (1.3)$$

Pri relativistických rýchlostiach dochádza tiež k dilatácii času. Kvôli dilatácii času prebiehajú procesy v oblastiach horúcej hmoty, ktoré sa pohybujú rôznymi rýchlosťami, rôzne rýchlo. Keďže dominantný smer pohybu je pozdĺžny, zavádzame pozdĺžny vlastný čas. V ňom sa udalosti vyvíjajú rovnako rýchlo pre všetky oblasti, ktoré sa pohybujú len v pozdĺžnom smere. Pozdĺžny vlastný čas môžeme zdefinovať spolu s časopriestorovou rapiditou η pomocou súradníc z a t

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2} \quad (1.4a)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right). \quad (1.4b)$$

Tieto vzťahy sa dajú inverzne prepísať do tvaru

$$z = \tau \sinh \eta \quad (1.5a)$$

$$t = \tau \cosh \eta. \quad (1.5b)$$

Súradnice v priečnej rovine môžeme prepísať pomocou klasických polárnych súradníc. Štvorvektor polohy potom môžeme písať ako

$$x^\mu = (\tau \cosh \eta, r \cos \theta, r \sin \theta, \tau \sinh \eta). \quad (1.6)$$

1.2 Smer expanzie

Pri emisii hadrónov z horúcej hmoty je dôležité uvedomiť si, akým smerom hmota expanduje. Je prirodzené uvažovať, že kolektívny pohyb hmoty je radiálny, teda v smere od stredu horúcej hmoty. V prípade horúcej hmoty bez anizotropií je to jediná rozumná možnosť. Ak ale hmota nemá kruhovo symetrický tvar, vzniká tu aj iná možnosť. Hmota sa môže kolektívne pohybovať v smere kolmom na svoj povrch. V tejto práci budeme uvažovať túto možnosť. Motiváciu nám k tomu dáva to, že pohyb hmoty je spôsobený rozdielnym tlakom a smer tohto pohybu je v smere najväčšieho gradientu tlaku. A ten je práve v smere kolmom na povrch. Navyše dáta namerané na detektore STAR [2] potvrdzujú správnosť tejto úvahy v prípade eliptickej anizotropie [3]. Táto skutočnosť nám do modelu pridáva ďalší uhol, ktorý budeme musieť zohľadniť v našich výpočtoch. Pre lepší prehľad budeme uhly označovať nasledovne:

- ϕ je azimutálny uhol, pod ktorým je častica emitovaná. Tento uhol sa preto vyskytuje vo štvorvektore hybnosti.

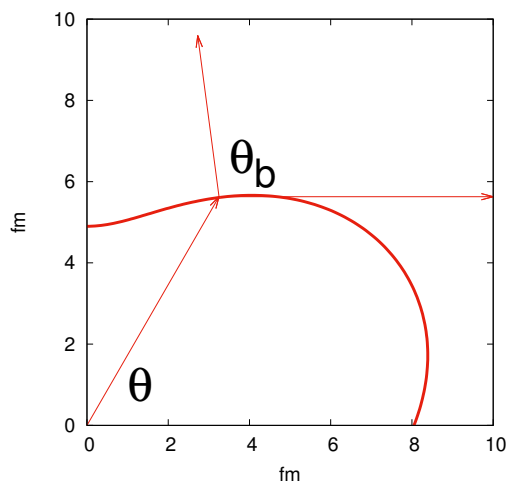
- θ je azimutálny uhol, pod ktorým sa častica nachádza v momente, kedy bola emitovaná. Z tohto dôvodu sa tento uhol vyskytuje vo štvorvektore polohy.
- θ_b je uhol kolmý na plochu horúcej hmoty prislúchajúci miestu na okraji hmoty ležiacom pod uhlom θ (obrázok 1.1).

Uhol θ_b dokážeme vyjadriť ako funkciu uhla θ s využitím derivácií. Derivácia je definovaná ako dotyčnica k funkcii, my ale potrebujeme kolmicu na povrch, takže môžeme napísať

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\theta_b - \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.7)$$

Z tejto rovnice si môžeme vyjadriť hľadaný uhol θ_b , no kým nebudeme mať konkrétnu funkciu opisujúcu tvar horúcej hmoty, musíme sa uspokojiť so všeobecným výrazom

$$\theta_b = \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d\theta}{d\theta}}. \quad (1.8)$$



Obr. 1.1: Rozdiel medzi uhlami. Na obrázku je znázornená definícia uhla θ_b a tiež ukážka toho, ako θ_b závisí na θ . Hrubá čiara znázorňuje okraj horúcej hmoty.

Keďže hmota expanduje pod uhlom θ_b , jej priečnu rýchlosť môžeme previesť do polárnych súradníc

$$v_x = v_t \cos \theta_b \quad (1.9a)$$

$$v_y = v_t \sin \theta_b. \quad (1.9b)$$

Priečna rýchlosť bude závislá od vzdialenosti od stredu hmoty. Štvorvektor rýchlosti si môžeme napísať do podobného tvaru ako štvorvektor x vo vzťahu (1.6) pomocou priečnej rapidity ρ ako

$$u^\mu = (\cosh \eta \cosh \rho, \sinh \rho \cos \theta_b, \sinh \rho \sin \theta_b, \cosh \rho \sinh \eta). \quad (1.10)$$

Priečna rapidita ρ rastie so vzdialenosťou od stredu horúcej hmoty a práve preto ju využijeme na parametrizáciu expanznej anizotropie.

1.3 Emisná funkcia

Ako sme už spomenuli, rozdelenie hadrónov je charakterizované emisnou funkciou, ktorú označujeme $S(x, p)$. Táto funkcia nám udáva nám pravdepodobnosť emisie častice s hybnosťou p v mieste s polohovým štvorvektorom x . Formálne ide o Wignerovu hustotu vo fázovom priestore. Emisná funkcia charakterizuje jednotlivé modely.

Integrovaním emisnej funkcie cez celý objem horúcej hmoty dostaneme všetky emitované hadróny a ich rozdelenie hybností

$$P(p_t, \phi) = \frac{d^3N}{p_t dp_t dY d\phi} = \int S(x, p) d^4x. \quad (1.11)$$

Toto hybnostné spektrum závisí od uhla ϕ . Navyše vieme, že táto závislosť musí byť 2π -periodická. To nám hovorí, že spektrum môžeme rozvinúť do Fourierovho radu

$$P(p_t, \phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2N}{p_t dp_t dY} \Big|_{Y=0} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n(p_t) \cos(n(\phi - \theta_n)) \right). \quad (1.12)$$

Tu sme sa zamerali iba na častice v strednej rapidite. Koefficienty Fourierovho rozvoja môžeme vo všeobecnosti vyjadriť v tvare

$$v_n(p_t) = \frac{\int_0^{2\pi} P(p_t, \phi) \cos(n(\phi - \theta_n)) d\phi}{\int_0^{2\pi} P(p_t, \phi) d\phi}. \quad (1.13)$$

Tieto koefficienty sú experimentálne merateľnou a meranou veličinou, takže nám vytvárajú oblasť, v ktorej môžeme porovnávať experimentálne dáta s teoretickými. Uhly θ_n , ktoré parametrizujú tento Fourierov rozvoj, určujú natočenie n -tej harmonickej zložky vzhľadom na reakčnú rovinu.

1.4 Blast-wave model

Blast-wave model je teoretický model popisujúci produkciu častíc v zrážkach ťažkých iónov. Je charakterizovaný emisnou funkciou, ktorá je zložená z niekoľkých faktorov.

V prvom rade predpokladáme klasické Boltzmanovo tepelné rozdelenie. Preto bude emisná funkcia úmerná

$$S(x, p) d^4x \propto e^{-\frac{E^*}{T}}, \quad (1.14)$$

kde E^* je energia meraná v pokojovej sústave expandujúcej hmoty. Tú môžeme určiť vynásobením štvorvektoru hybnosti so štvorvektorom kolektívnej rýchlosti emitujúcej oblasti horúcej hmoty. V Minkowského metriке dostaneme

$$\begin{aligned}
E^* &= p_\mu u^\mu \\
&= m_t \cosh \rho \cosh \eta \cosh Y - p_t \sinh \rho (\cos \phi \cos \theta_b + \sin \phi \sin \theta_b) \\
&\quad - m_t \cosh \rho \sinh \eta \sinh Y \\
&= m_t \cosh \rho \cosh(\eta - Y) - p_t \sinh \rho \cos(\phi - \theta_b).
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Postupným chladnutím horúcej hmoty sa hadróny v blízkosti okraja hmoty emitujú. V blast-wave modeli vymrznutie uvažujeme ako proces, pri ktorom silná interakcia zmizne v jedinom okamihu a všetky hadróny začnú unikať z horúcej hmoty v rovnakom vlastnom čase $\tau = \tau_0$. To nám v časopriestore vytvára hyperbolickú nadrovinu vymrznutia danú rovnicou

$$\sqrt{t^2 - z^2} = \tau_0. \tag{1.16}$$

Aby sa model viac približoval skutočnosti, nepovažujeme vymrznutie za bodovú udalosť, ale za Gaussovsky rozmazanú udalosť so šírkou $\Delta\tau$. Súradnica τ tak prispieva do emisnej funkcie časťou

$$S(x, p)d^4x \propto \frac{\tau d\tau}{\sqrt{2\pi}\Delta\tau} \exp\left(-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\Delta\tau^2}\right). \tag{1.17}$$

Ďalší príspevok tvorí Cooper-Fryeov prefaktor. V emisnej funkcii musíme rátať s prúdom častíc vytekajúcich cez nadplochu, ktorá oddeľuje horúcu hmotu interagujúcich hadrónov od súboru voľne letiacich hadrónov, ktoré spolu neinteragujú [4]. Tento prúd vypočítame ako súčin hybnosti a elementu plochy $p^\mu d\Sigma_\mu$, kde

$$d\Sigma_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\kappa\varrho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x} \frac{\partial x^\kappa}{\partial y} \frac{\partial x^\varrho}{\partial \eta} dx dy d\eta. \tag{1.18}$$

V tomto vzťahu je $\varepsilon_{\mu\nu\kappa\varrho}$ antisymetrický tenzor, pre ktorý platí $\varepsilon_{0123} = 1$. Z tejto rovnice dostávame príspevok do emisnej funkcie v tvare

$$S(x, p) \propto m_t \cosh(\eta - Y) dx dy d\eta. \tag{1.19}$$

Posledný príspevok je dôsledkom hranatého profilu emisnej funkcie. To znamená, že emisná funkcia je nulová všade mimo horúcej hmoty. Navyše nevyžadujeme spojitosť emisnej funkcie na okraji horúcej hmoty, funkcia sa tu teda mení na nulu skokom. To je zabezpečené pomocou Heavisideovej funkcie $\Theta(x)$, ktorá je nulová pre záporné hodnoty x a rovná 1 pre kladné hodnoty. V našom prípade za x dosadíme $1 - \bar{r}$, pričom \bar{r} je efektívny priečny polomer horúcej hmoty nadobúdajúci hodnoty 0 (v strede) až 1 (na okraji hmoty).

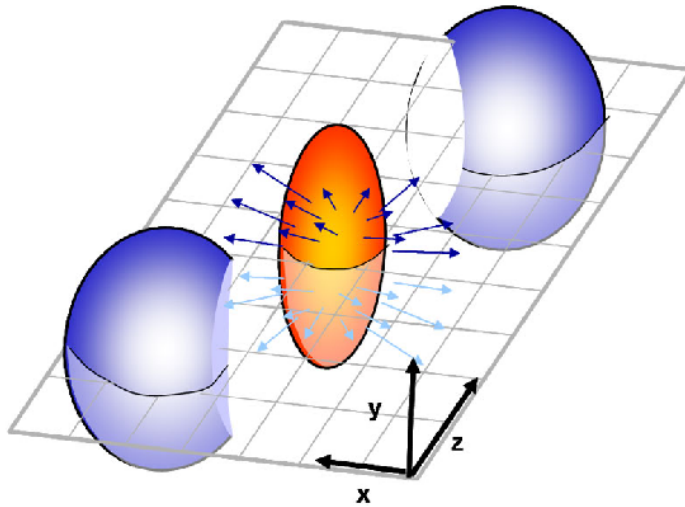
Keď poskladáme všetky štyri faktory, dostaneme emisnú funkciu charakterizujúcu blast-wave model v tvare

$$S(x, p)d^4x = \frac{m_t \cosh(\eta - Y)}{(2\pi)^3} d\eta dx dy \frac{\tau d\tau}{\sqrt{2\pi\Delta\tau}} \exp\left(-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\Delta\tau^2}\right) \times \exp\left(-\frac{p^\mu u_\mu}{T}\right) \Theta(1 - \bar{r}), \quad (1.20)$$

kde výraz $\frac{1}{(2\pi)^3}$ prichádza do emisnej funkcie ako objem elementárnej bunky fázového priestoru.

1.5 Anizotropie v blast-wave modeli

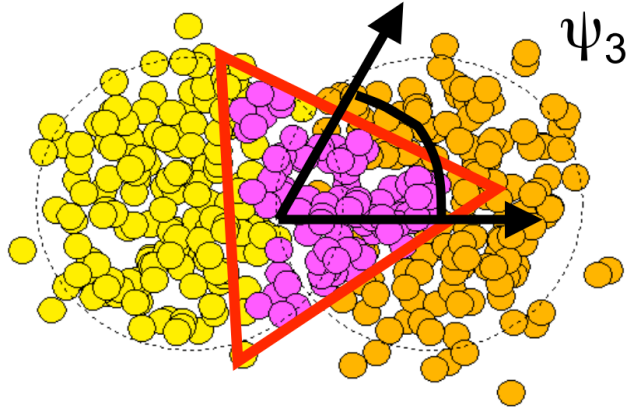
Ako prví zaviedli do blast-wave modelu anizotropiu Mike Lisa a Fabrice Retière [5]. Ich spôsob parametrizácie však uvažoval iba anizotropiu druhého rádu, teda eliptickú anizotropiu. Tá vzniká najmä v dôsledku necentrality zrážok, kedy prierez zrážky tvorí približne elipsu (viď obr. 1.2).



Obr. 1.2: Ukážka pôvodu anizotropie druhého rádu v necentralite zrážky. Prevzaté z [6]

V dnešnej dobe už ale vieme aj o existencii vyšších rádov anizotropií [7]. Tie vznikajú kvôli rôznemu rozdeleniu nukleónov v jadrách a spôsobuje to, že žiadne dve zrážky nemôžu mať úplne rovnaký tvar (viď obr. 1.3). Platí však, že každý ďalší rád je slabší, my sa preto zameriavame na tretí rád anizotropií, nazývaný tiež triangulárna anizotropia.

Spôsob parametrizácie anizotropií však bude mierne odlišný od spôsobu, akým to robili Lisa-Retière, nakoľko ich parametrizácia sa nedá zovšeobecniť do vyšších rádov.



Obr. 1.3: Ukážka pôvodu anizotropie tretieho rádu v rozložení nukleónov v jadre pred zrážkou. Prevzaté z [8]

1.5.1 Priestorová anizotropia

Blast-wave model pozná dva druhy anizotropií: priestorovú a expanznú. Priestorová anizotropia predstavuje narušenie radiálnej symetrie tvaru horúcej hmoty. To znamená, že podobne ako na obrázkoch 1.2 a 1.3 nemá horúca hmota kruhový, ale komplikovanejší tvar. Takýto tvar sa dá veľmi pekne parametrizovať pomocou Fourierovho radu v polárnych súradniciach. Zavedieme si teda funkciu $R(\theta)$, ktorá opisuje okraj horúcej hmoty, teda jej veľkosť pod uhlom θ :

$$R(\theta) = R_0 \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos(n(\theta - \theta_n)) \right). \quad (1.21)$$

Vo Fourierovom rozvoji sme vynechali prvý člen, pretože nezodpovedá narušeniu kruhovej symetrie, iba posúva kruh. Priestorová anizotropia je teda parametrizovaná koeficientami a_n a uhlami rotácie θ_n , čo znamená, že každý rád má 2 parametre.

Teraz si tiež môžeme presne zadefinovať škálovaný priečný polomer, o ktorom sme hovorili v predchádzajúcej sekcii, ako

$$\bar{r} = \frac{r}{R(\theta)}. \quad (1.22)$$

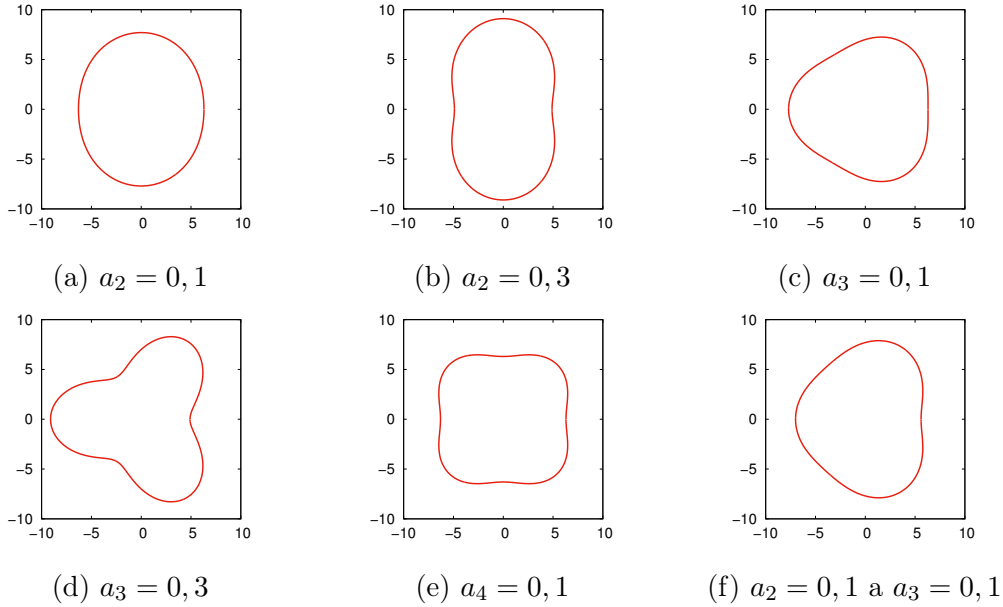
Prechod do polárnych súradníc bude potom s využitím tohto polomeru vyzeráť nasledovne

$$x = \bar{r}R(\theta) \cos \theta \quad (1.23a)$$

$$y = \bar{r}R(\theta) \sin \theta. \quad (1.23b)$$

1.5.2 Expanzná anizotropia

Anizotropia v produkcii hadrónov však nemusí vznikáť len nesymetrickým tvarom horúcej hmoty, ale tiež nepravidelným rozložením hadrónov vo vnútri hmoty. To má



Obr. 1.4: Horúca hmota s priestorovou anizotropiou. Na týchto obrázkoch môžeme vidieť tvar horúcej hmoty v závislosti od vstupných parametrov. Na obrázkoch (a) a (b) je znázornená anizotropia druhého rádu, na obrázkoch (c) a (d) anizotropia tretieho rádu a na obrázku (e) anizotropia štvrtého rádu. Na obrázku (f) je znázornená kombinácia anizotropie druhého a tretieho rádu. Obrázky sú vykresľované pre $R_0 = 7$ fm.

za následok, že hmota neexpanduje všetkými smermi rovnako rýchlo a hadróny z nej budú emitované do niektorých smerov viac ako do iných.

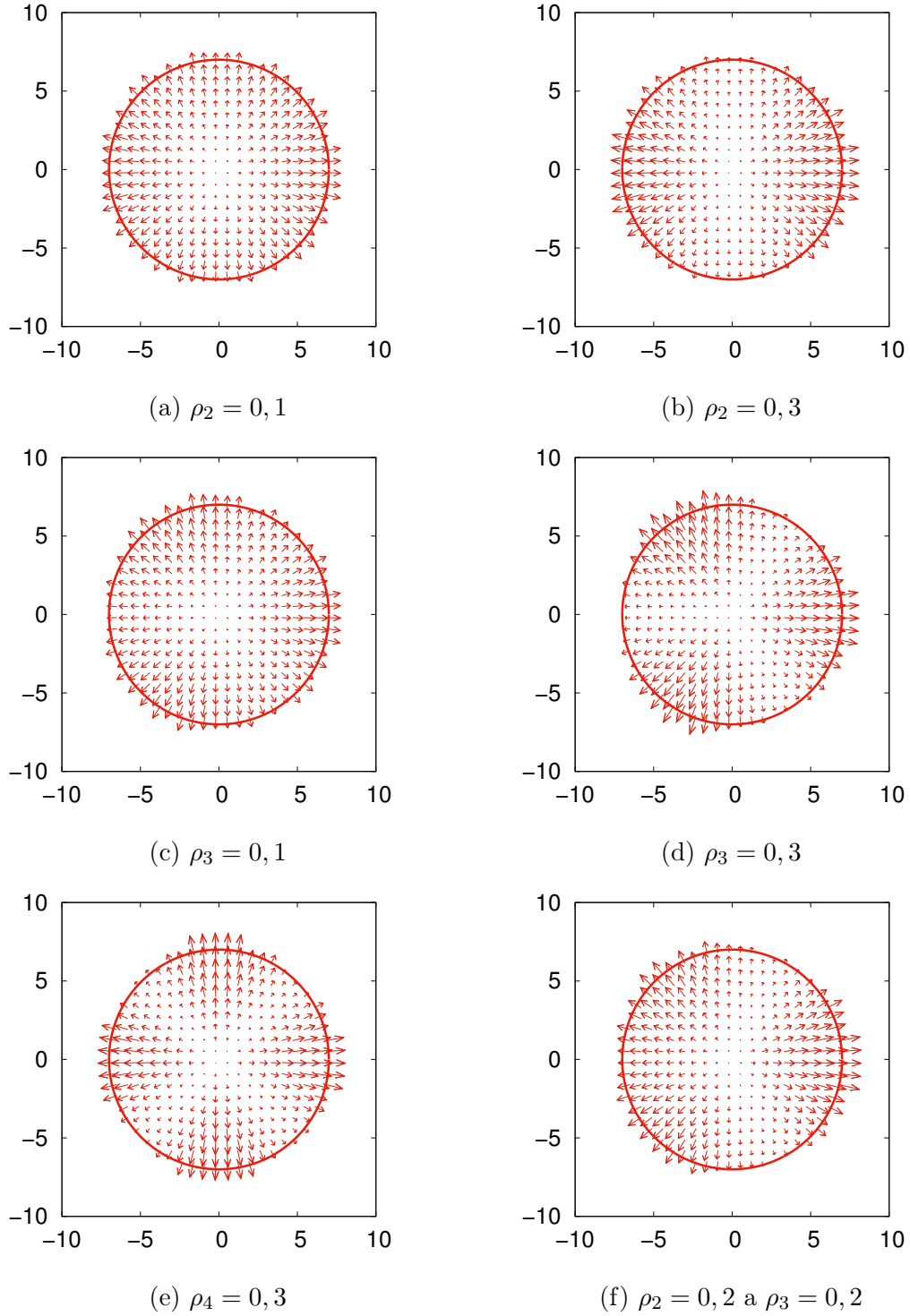
Expanznú anizotropiu môžeme parametrizovať cez Fourierov rozvoj pričnej rapidity. Rapidity ale navyše rastie s efektívnym polomerom \bar{r} a v strede horúcej hmoty je zo symetrie nulová. Pre pričnú rapiditu sme preto postulovali vzťah

$$\rho(\bar{r}, \theta_b) = \bar{r} \rho_0 \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} 2\rho_n \cos(n(\theta_b - \theta_n)) \right). \quad (1.24)$$

Teraz si treba všimnúť niekoľko dôležitých vecí. V prvom rade treba poznamenať, že na rozdiel od priestorovej anizotropie, pričná rapidita nezávisí od uhla θ ale od uhla θ_b , pretože rapidita musí smerovať kolmo na povrch plochy horúcej hmoty. V tomto momente musíme dodefinovať uhol θ_b aj vo vnútri hmoty. Tam je definovaný ako uhol kolmý na povrch útvaru s konštantným efektívnym polomerom \bar{r} .

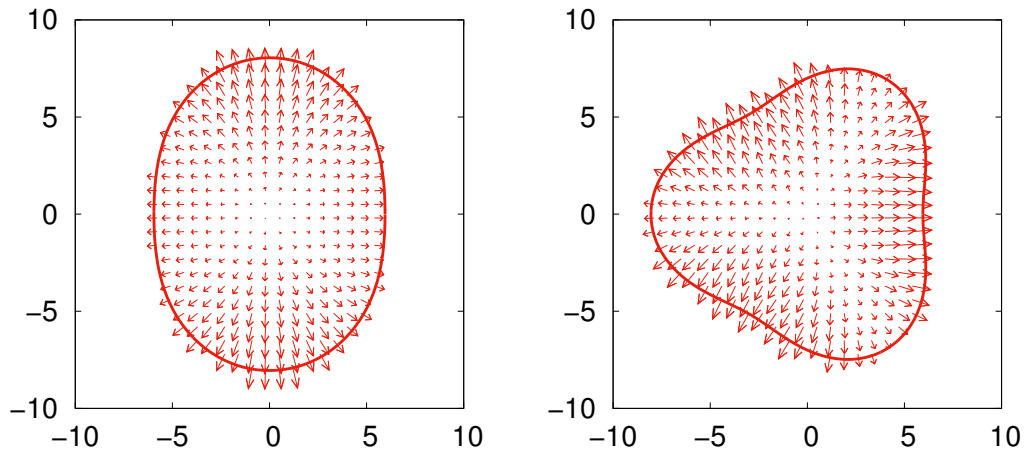
Ďalej si môžeme všimnúť, že uhly θ_n sú rovnaké, ako v prípade priestorovej anizotropie. To znamená, že priestorová aj expanzná anizotropia rovnakého rádu musia vždy smerovať tým istým smerom a môžu byť vo fáze alebo v protifáze². Znamená to tiež to, že každý rád anizotropií má dokopy tri parametre: a_i , ρ_i a θ_i .

²To závisí od znamienok a_i a ρ_i . a_i má pri nulovom azimute minimum ak je kladné, ρ_i tam má maximum ak je kladné, sú teda v protifáze.



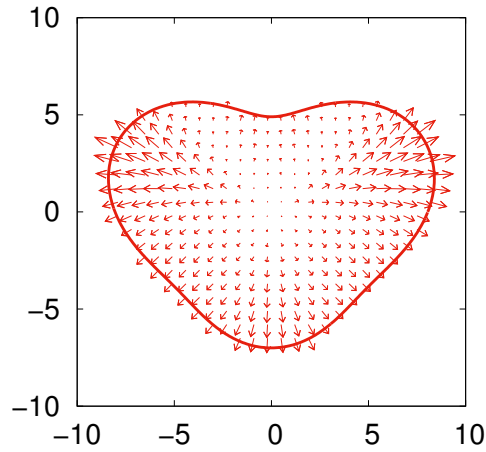
Obr. 1.5: Horúca hmota s expanznou anizotropiou. Na obrázkoch sú znázornené vektorové polia zobrazujúce priečnu rapiditu a jej azimutálnu závislosť. Na obrázkoch (a) a (b) je znázornená expanzná anizotropia druhého rádu, na obrázkoch (c) a (d) anizotropia tretieho rádu a na obrázku (e) anizotropia štvrtého rádu. Na obrázku (f) je opäť znázornená kombinácia anizotropií druhého a tretieho rádu. Obrázky boli vytvorené pre vstupné parametre $R_0 = 7$ fm, $\rho_0 = 0, 8$.

Je intuitívne, že tieto dva typy anizotropií sa môžu aj kombinovať. Na obrázku 1.6 môžeme vidieť kombináciu oboch typov anizotropií.



(a) $a_2 = 0,15$ a $\rho_2 = -0,2$

(b) $a_3 = 0,15$ a $\rho_3 = 0,2$



(c) $a_2 = a_3 = -0,15$,
 $\rho_2 = \rho_3 = 0,2$ a $\theta_3 = \frac{\pi}{6}$

Obr. 1.6: Kombinácia priestorovej a expanznej anizotropie. Na obrázkoch sú znázornené rýchlostné polia v horúcej hmote v prípade kombinácie oboch anizotropií (a) druhého rádu, (b) tretieho rádu a (c) druhého a tretieho rádu spolu pri parametroch $R_0 = 7$ fm, $\rho_0 = 0,8$.

Kapitola 2

Korelačná femtoskopia

Ďalším vhodným prostriedkom na meranie vlastností zrážok ťažkých iónov je korelačná (alebo HBT) femtoskopia. Jedná sa o meranie korelácií párov častíc z horúcej hmoty. Táto korelácia je tam kvôli symetrizácii vlnových funkcií a tiež kvôli vzájomnej interkácii bozónov, ktoré letia blízko seba. Z nich sa najčastejšie jedná o pióny. Symetrizácia hrá úlohu najmä keď sú dva pióny blízko seba vo fázovom priestore, teda platí $\Delta p \Delta x \sim \hbar$. Meraním korelácie môžeme skúmať štruktúru horúcej hmoty na úrovni femtometrov. V tejto práci sa obmedzíme na korelácie párov identických bozónov.

Túto metódu vymysleli na meranie uhlovej veľkosti rádioastronomických zdrojov v 50-tych rokoch Robert Hanbury Brown a Richard Q. Twiss. Medzi ich metódou a korelačnou femtoskopiou v časticovej fyzike existuje analógia, preto sa korelačné polomery niekedy označujú aj ako HBT polomery.

2.1 Korelačná funkcia

Korelačná funkcia nám opisuje, aká je korelácia medzi dvomi rovnakými hadrónmi s hybnosťami p_1 a p_2 . Je definovaná, ako pomer dvojčasticového spektra $P_2(p_1, p_2)$ a súčinu dvoch jednočasticových spektier. V menovateli korelačnej funkcie potrebujeme mať prakticky dvojčasticové spektrum bez korelácie. To experimentálne dostaneme tak, že budeme brať páry častíc, kde každá častica pochádza z inej udalosti, čím sa zbavíme ich vzájomnej korelácie. Korelačnú funkciu si môžeme napísať v tvare

$$C(p_1, p_2) = \frac{P_2(p_1, p_2)}{P(p_1)P(p_2)} = \frac{E_1 E_2 \frac{d^6 N}{dp_1^3 dp_2^3}}{\left(E_1 \frac{d^3 N}{dp_1^3}\right) \left(E_2 \frac{d^3 N}{dp_2^3}\right)}. \quad (2.1)$$

Táto korelačná funkcia dosahuje hodnotu 1 vtedy, keď hadróny vôbec nekorelujú. To nastáva napríklad v prípade, keď $|p_1 - p_2| \rightarrow \infty$, teda častice letia úplne opačným smerom. Takéto častice sa nemohli žiadnym spôsobom ovplyvniť. Naopak keď

$|p_1 - p_2| \rightarrow 0$, korelačná funkcia vytvára vrchol. To je prípad, kedy častice vyletia z horúcej hmoty veľmi blízko seba vo fázovom priestore. Pri identických bozónoch je najdôležitejším efektom symetrizácia ich vlnových funkcií a práve tento jav sa prejaví predovšetkým v oblasti, kde sú bozóny blízko seba vo fázovom priestore.

Z princípu neurčitosti vieme, že šírka tohoto špicu bude nepriamo úmerná veľkosti zdroja. Nás bude zaujímať práve oblasť, kedy sú častice silno korelované. V takom prípade sa oplatí zdefinovať si namiesto hybností p_1 a p_2 hybnosti

$$K = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \quad (2.2a)$$

$$q = p_1 - p_2 \quad (2.2b)$$

V tomto prípade je K štvorhybnosťou ťažiska našich dvoch častíc a q rozdielovou štvorhybnosťou. Nultú zložku hybnosti K ešte aproximujeme, aby bol jej kvadrát rovný hmotnosti častice

$$K^0 = \sqrt{m^2 + \vec{K}^2}. \quad (2.3)$$

Zdrojom častíc je horúca hmota charakterizovaná emisnou funkciou $S(x, p)$. Jednočasticové spektrum môžeme vypočítať integrovaním emisnej funkcie podľa vzťahu (1.11). Dvojčasticové spektrum získame pomocou Fourierovej transformácie emisnej funkcie. Výslednú korelačnú funkciu preto môžeme písať v tvare

$$C(p_1, p_2) = C(q, K) = 1 + \frac{|\int d^4x S(x, K) \exp(iqx)|^2}{\int d^4x S(x, p_1) \int d^4x S(x, p_2)}. \quad (2.4)$$

Fyzikálne zaujímavá je práve oblasť okolo špicu, preto uvažujeme malé hodnoty q , odkiaľ potom $p_1 \approx p_2 \approx K$, čo je hlavnou výhodou zavedenia hybností K a q . Rovnica (2.4) tak prejde do tvaru

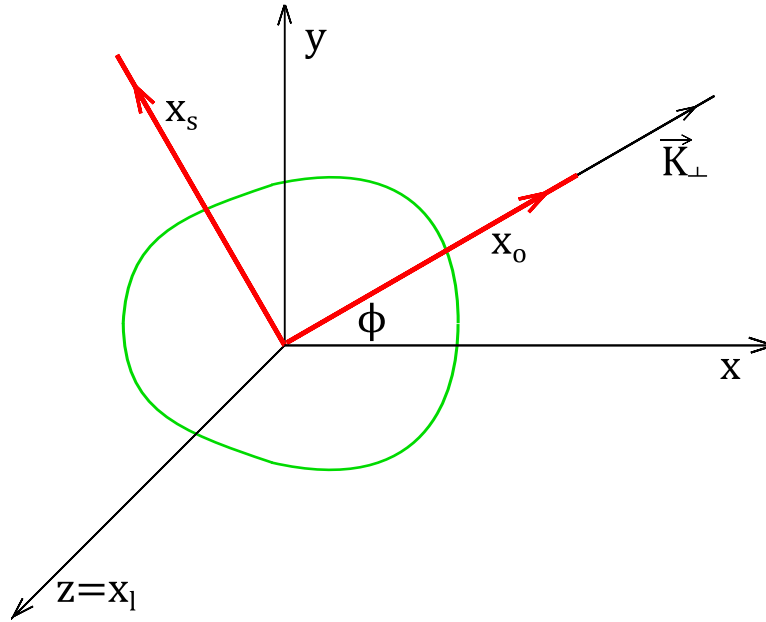
$$C(q, K) - 1 \approx \frac{|\int d^4x S(x, K) \exp(iqx)|^2}{(\int d^4x S(x, K))^2}. \quad (2.5)$$

V tomto momente je vhodné zmeniť sústavu súradníc. Konkrétne spravíme otočenie súradníc tak, aby os x bola otočená v smere priemetu vektora \vec{K} na priečnu rovinu. Túto os nazývame hlavnou (v angličtine *outward*) x_o , os na ňu kolmú v priečnej rovine nazývame bočnou (v angličtine *sideward*) x_s a os z , ktorá sa nezmenila, nazývame pozdĺžnou (v angličtine *longitudinal*) osou x_l . Zmena súradníc oproti pôvodným je znázornená na obr. 2.1. V takýchto súradniciach je štvorvektor K rovný

$$K = (K^0, K^o, 0, K^l). \quad (2.6)$$

Rozložením korelačnej funkcie do Taylorovho radu podľa hybnosti q a porovnaním s Taylorovým radom Gaussovho rozdelenia sa dá ukázať [3], že korelačnú funkciu možno aproximovať do tvaru

$$C(q, K) - 1 \approx \exp(-q^\mu q^\nu \langle \tilde{x}_\mu \tilde{x}_\nu \rangle). \quad (2.7)$$



Obr. 2.1: Vzťah *out-side-long* súradníc ku klasickým súradniciam. Na obrázku je zelenou farbou vyznačená horúca hmota, čiernou farbou klasické súradnice a červenou *osl* súradnice.

Toto odvodenie je tiež spracované v Appendixe A.

Stredné hodnoty sa v tomto prípade myslia ako ustredňovanie cez emisnú funkciu, čo môžeme zapísať ako

$$\langle f(x) \rangle (K) = \frac{\int d^4x f(x) S(x, K)}{\int d^4x S(x, K)}. \quad (2.8)$$

Označenie \tilde{x} je definované ako rozdiel aktuálnej hodnoty a strednej hodnoty, teda

$$\tilde{x}_\mu = x_\mu - \langle x_\mu \rangle. \quad (2.9)$$

2.2 HBT polomery

Je dôležité uvedomiť si, že štvorvektory q a K sú navzájom previazané rovnicou

$$q^\mu K_\mu = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) = \frac{1}{2}(m^2 - m^2) = 0. \quad (2.10)$$

To znamená, že iba tri zložky relatívnej hybnosti q sú nezávislé. Tú štvrtú môžeme určiť pomocou hybnosti K

$$q^0 = \vec{q} \cdot \vec{\beta} = q_o \beta_o + q_i \beta_i, \quad (2.11)$$

kde sme ešte pridali vektor $\vec{\beta}$ definovaný ako

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{K}}{K^0} = (\beta_o, 0, \beta_i). \quad (2.12)$$

Keďže si q^0 vieme vyjadriť pomocou ostatných zložiek tohoto štvorvektora, nebude sa nachádzať v Gaussovej parametrizácii. Tú tak môžeme poskladať z troch zložiek vektora \vec{q} *out*, *side* a *long*

$$C(q, K) - 1 = \exp \left(-R_o^2 q_o^2 - R_s^2 q_s^2 - R_l^2 q_l^2 - 2R_{os}^2 q_o q_s - 2R_{ol}^2 q_o q_l - 2R_{sl}^2 q_s q_l \right), \quad (2.13)$$

kde koeficienty R_i sú korelačné polomery alebo HBT polomery. Z rovnice (6.11) si môžeme vyjadriť korelačné polomery pomocou rozptylov a variancií. Ak k tomu ešte pridáme podmienku 2.11, môžeme korelačné polomery napísať v tvare

$$R_o^2(K) = \left\langle (\tilde{x}_o - \beta_o \tilde{t})^2 \right\rangle (K) \quad (2.14a)$$

$$R_s^2(K) = \left\langle \tilde{x}_s^2 \right\rangle (K) \quad (2.14b)$$

$$R_l^2(K) = \left\langle (\tilde{x}_l - \beta_l \tilde{t})^2 \right\rangle (K) \quad (2.14c)$$

$$R_{os}^2(K) = \left\langle (\tilde{x}_o - \beta_o \tilde{t}) \tilde{x}_s \right\rangle (K) \quad (2.14d)$$

$$R_{ol}^2(K) = \left\langle (\tilde{x}_o - \beta_o \tilde{t}) (\tilde{x}_l - \beta_l \tilde{t}) \right\rangle (K) \quad (2.14e)$$

$$R_{sl}^2(K) = \left\langle (\tilde{x}_l - \beta_l \tilde{t}) \tilde{x}_s \right\rangle (K). \quad (2.14f)$$

A čo nám vlastne tieto polomery hovoria? V prvom rade treba povedať, že sa nejedná o skutočný polomer horúcej hmoty. Všetky HBT polomery sú funkciami hybnosti K . Keď sa pozrieme na častice, ktoré sú emitované s hybnosťou K , môžeme si uvedomiť, že tieto častice nemôžu byť emitované hocikde, napríklad nemôžu byť emitované na jednej strane horúcej hmoty a letieť smerom cez stred horúcej hmoty na druhú stranu. Existuje oblasť zvaná oblasť homogenity, ktorá určuje, kde môžu byť emitované hadróny s danou hybnosťou, a práve rozmery tejto oblasti nám udávajú HBT polomery.

Podobne ako spektrum, aj HBT polomery meriame pod rôznym azimutálnym uhlom a ukazuje sa, že sú tiež azimutálne závislé. Ako také ich preto môžeme opäť rozvinúť do Fourierovho radu a sledovať závislosti jednotlivých koeficientov. Vo všeobecnosti tak budú mať korelačné polomery tvar

$$R_\mu^2 = (R_\mu^2)_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (R_\mu^2)_n \cos(n(\phi - \delta_n)), \quad (2.15)$$

kde δ_n je fázový posun n -tého rádu anizotropie a je to teda tiež parameter Fourierovho radu. Nás však budú podobne ako pri spektre zaujímať relatívne a nie absolútne koeficienty, teda v tvare $(R_\mu^2)_n / (R_\mu^2)_0$.

Kapitola 3

Emisné funkcie rôznych zdrojov

Experimentálne dáta ukazujú, že korelačné funkcie nemajú Gaussovský tvar. Mohlo by sa preto zdať, že je to kvôli tomu, že ani emisné funkcie nemajú Gaussovský tvar. Experimentálne určené korelačné funkcie však neopisujú jednotlivé udalosti, ale sú výsledkom sčítania korelačných funkcií všetkých udalostí. Je preto potrebné si uvedomiť, že tento proces môže mať taktiež vplyv na tvar meranej korelačnej funkcie.

3.1 Gaussovská emisná funkcia

Uvažujme zdroje emitujúce častice s eliptickou anizotropiou. Pre veľký počet udalostí máme takýchto zdrojov mnoho, pričom každý z nich má iný tvar a iné vlastnosti. Na začiatok uvažujme, že emisné funkcie týchto zdrojov majú tvar Gaussovského rozdelenia:

$$S(x, y) = N e^{-ax^2 - by^2 + 2cxy}, \quad (3.1)$$

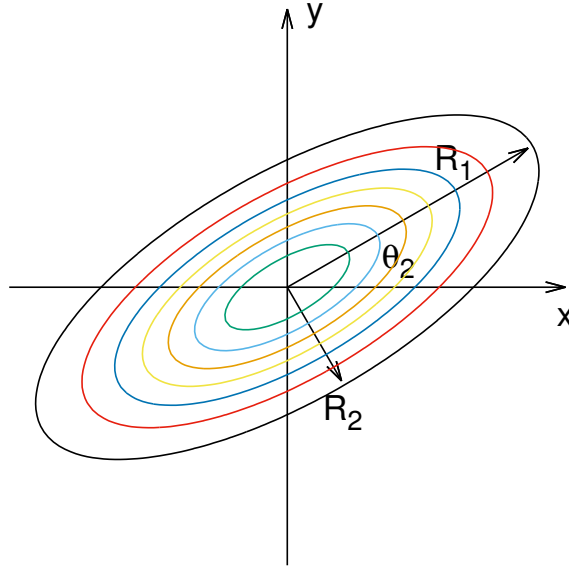
kde N je normalizačná konštanta a koeficienty a , b a c môžeme vyjadriť pomocou šírky hlavnej a vedľajšej osi vzniknutej elipsy a pomocou uhlu naklonenia podľa vzťahov

$$a = \frac{\cos^2 \theta_2}{2R_1^2} + \frac{\sin^2 \theta_2}{2R_2^2} \quad (3.2a)$$

$$b = \frac{\sin^2 \theta_2}{2R_1^2} + \frac{\cos^2 \theta_2}{2R_2^2} \quad (3.2b)$$

$$c = -\frac{\sin 2\theta_2}{4R_1^2} + \frac{\sin 2\theta_2}{4R_2^2}. \quad (3.2c)$$

Korelačnú funkciu vypočítame z emisnej funkcie podľa vzťahu (2.5). Profil zdroja v pozdĺžnom smere sa faktorizuje a tak sa budeme zaoberať len tvarom korelačnej funkcie v priečnej rovine. Aby sme mohli regulérne počítať korelačnú funkciu iba v priečnej rovine, uvažujeme závislosť od zvyšných dvoch súradníc ako delta funkciu, t.j. $\delta(z)\delta(t)$. Výhodou delta funkcie je, že integrál a tiež Fourierova transformácia tejto funkcie je 1. Ďalej preto nebudeme závislosť od t a z uvažovať.



Obr. 3.1: Nákres emisnej funkcie s vyznačenými polosami

Najprv vypočítame menovateľ vzťahu (2.5):

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} S(x, y) dx dy &= \iint_{-\infty}^{\infty} N e^{-ax^2 - by^2 + 2cxy} dx dy = \iint_{-\infty}^{\infty} N e^{-a(x - \frac{c}{a}y)^2 - (b - \frac{c^2}{a})y^2} dx dy \\ &= N \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{\frac{\pi}{b - \frac{c^2}{a}}} = \frac{N\pi}{\sqrt{ab - c^2}} = N2\pi R_1 R_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Takejto emisnej funkcii odpovedá korelačná funkcia

$$C(q) - 1 = \frac{\left| \iint dx dy S(x, y) e^{i(q_o x + q_s y)} \right|^2}{(N2\pi R_1 R_2)^2} \quad (3.4)$$

Výpočtom tejto Fourierovej transformácie podľa Dodatku B dostaneme výslednú korelačnú funkciu, ktorá však už nezávisí od x a y , ale od q_o a q_s , v tvare

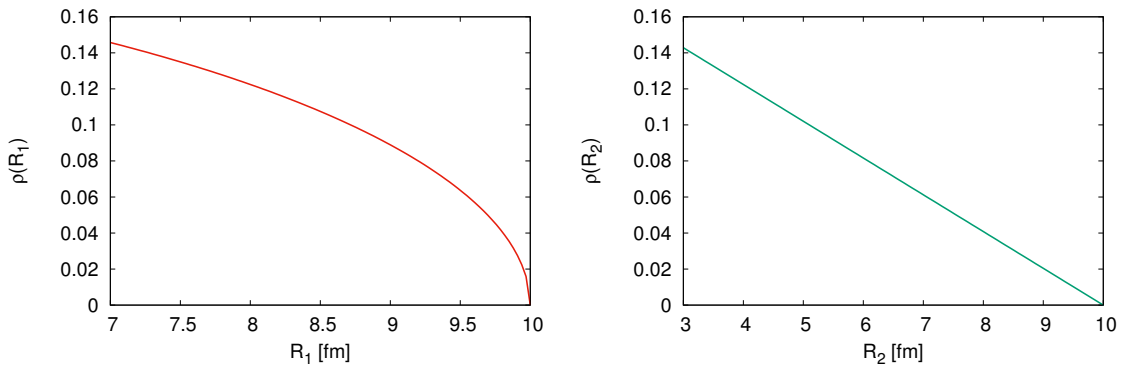
$$\begin{aligned} C(q) - 1 &= e^{-\frac{bq_o^2 + aq_s^2 + 2cq_o q_s}{2(ab - c^2)}} = \\ &= \exp \left(-q_o^2 (R_1^2 \cos^2 \theta_2 + R_2^2 \sin^2 \theta_2) - q_s^2 (R_1^2 \sin^2 \theta_2 + R_2^2 \cos^2 \theta_2) - \right. \\ &\quad \left. - q_o q_s \sin 2\theta_2 (-R_1^2 + R_2^2) \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Teraz si môžeme všimnúť, že korelačná funkcia jednotlivej udalosti má ešte stále gaussovský tvar. Je to dôsledkom toho, že Fourierova transformácia Gaussovej funkcie je tiež Gaussova funkcia. Tento fakt však platí iba pre jednu udalosť. Akonáhle máme

udalostí viac a každá z nich má iné parametre R_1 , R_2 a θ_2 , ich sumovaním sa môže stratiť táto vlastnosť a výsledkom môže byť negaussovská funkcia napriek tomu, že každý zo zdrojov je gaussovský.

Parametre, ktoré nám charakterizujú tvar emisnej a aj korelačnej funkcie R_1 , R_2 a θ_2 sú teda náhodné veličiny. Aby sme ich charakterizovali, potrebujeme určiť ich pravdepodobnostné rozdelenia. Uvažujme, že uhol θ_2 je rovnomerne rozdelený na intervale $(0, \pi)$. Tento uhol nemôže mať iné ako rovnomerné rozdelenie, pretože by došlo k narušeniu symetrie. Rozdelenie polomerov R_1 a R_2 môžeme uvažovať

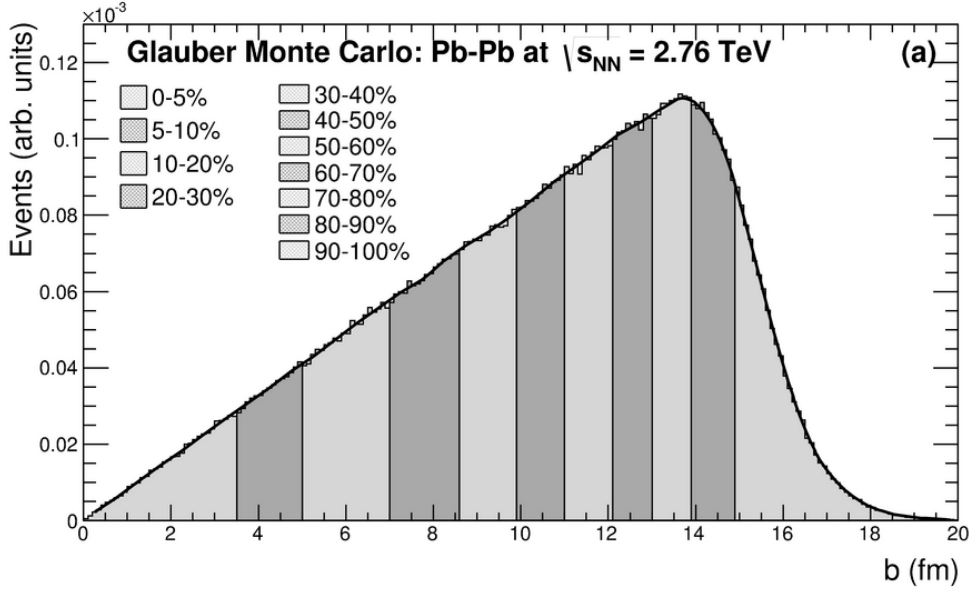
- a) rovnomerné na intervale (A, B) . V takomto prípade nemusí platiť, že $R_1 > R_2$, preto berieme uhol θ_2 z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$.
- b) nerovnomerné, založené na geometrii zrážky (obr. 3.2). V takom prípade vieme oba polomery vyjadriť pomocou zrážkového parametra b . Ten má hustotu pravdepodobnosti lineárne rastúcu $\rho(b) \propto b$ (obr. 3.3). Ak by sme si jadrá predstavili ako dva dokonalé kruhy, vzniknutý prekryv kruhov by mal vedľajší polomer $R_2 = R - \frac{b}{2}$, kde R je polomer jadra a hlavný polomer by mal veľkosť $R_1 = \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}}$.



Obr. 3.2: Hustota pravdepodobnosti polomerov horúcej hmoty v prípade, že uvažujeme ich nerovnomerné rozdelenie založené na geometrii zrážky. Obrázky sú vykreslené pre $R = 10$ fm.

Aby sme sa priblížili experimentálnym metódam ustredňovania cez veľké množstvo udalostí, musíme korelačnú funkciu integrovať cez všetky možné hodnoty našich parametrov

$$\int dR_1 \rho(R_1) \int dR_2 \rho(R_2) \int d\theta_2 \rho(\theta_2) (C(q) - 1). \quad (3.6)$$



Obr. 3.3: Hustota pravdepodobnosti zrážkového parametra podľa Glauberovho modelu. Prevzaté z [9].

3.1.1 Ustredňovanie cez veľkosť zdroja

Korelačnú funkciu si vieme prepísať do tvaru, v ktorom môžeme integrovať cez R_1 a R_2 nezávisle:

$$C(q) - 1 = e^{-R_1^2(q_o \cos \theta_2 - q_s \sin \theta_2)^2 - R_2^2(q_o \sin \theta_2 + q_s \cos \theta_2)^2}. \quad (3.7)$$

Výsledok tejto integrácie už závisí od uvažovaného rozdelenia polomerov R_1 a R_2 .

Rovnomerné rozdelenie

Uvažujme teda na začiatok, že sú veľkosti polomerov R_1 a R_2 dané rovnomerným rozdelením

$$R(A, B) = \frac{1}{B - A} \quad x \in (A, B) \quad (3.8)$$

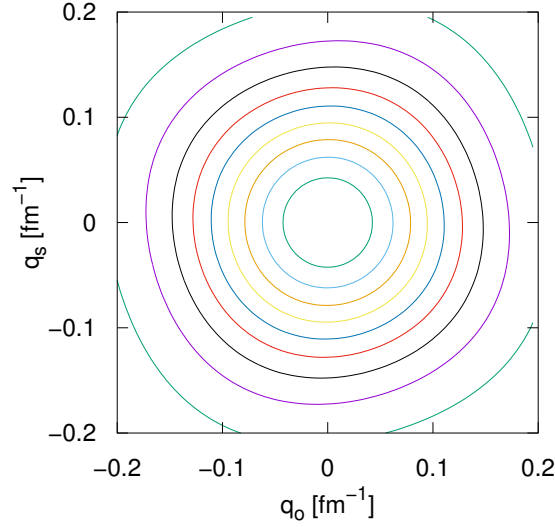
V takom prípade integrovaním cez obidva polomery dostaneme chybovú funkciu:

$$\begin{aligned} & \int_A^B \frac{e^{-R_1^2(q_o \cos \theta_2 - q_s \sin \theta_2)^2}}{B - A} dR_1 = \\ & = \frac{\sqrt{\pi} [\operatorname{erf}(B(q_o \cos \theta_2 - q_s \sin \theta_2)) - \operatorname{erf}(A(q_o \cos \theta_2 - q_s \sin \theta_2))]}{2(B - A)(q_o \cos \theta_2 - q_s \sin \theta_2)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Integrovanie cez R_2 je analogické a výsledok je veľmi podobný.

Nerovnomerné rozdelenie

Tentokrát budeme integrovať iba cez jednu premennú, a to zrážkový parameter. V korelačnej funkcii si za polomery dosadíme vzťahy $R_1 = \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}}$ a $R_2 = R - \frac{b}{2}$



Obr. 3.4: Vrsteňnicový graf preintegrovanj korelačnej funkcie s rovnomerne rozdeľenými veľkosťami zdroja pre parametre $A = 5$ fm, $B = 10$ fm a $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$.

a upravíme ju do tvaru:

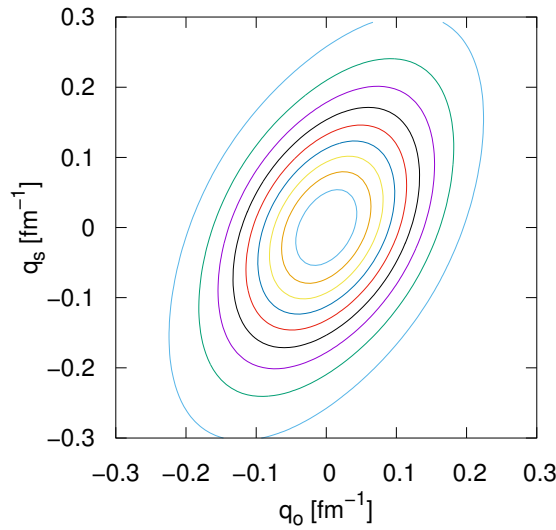
$$\begin{aligned}
 C(q) - 1 &= e^{-R_1^2(q_0 \cos \theta_2 - q_s \sin \theta_2)^2 - R_2^2(q_0 \sin \theta_2 + q_s \cos \theta_2)^2} = e^{-R_1^2 A^2 - R_2^2 B^2} \\
 &= e^{-(R^2 - \frac{b^2}{4})A^2 - (R - \frac{b}{2})^2 B^2} = e^{-R^2(A^2 + B^2) + RbB^2 - \frac{b^2}{4}(B^2 - A^2)} \\
 &= e^{\frac{A^4 R^2}{B^2 - A^2} - (B^2 - A^2) \left(\frac{b}{2} - \frac{RB^2}{B^2 - A^2} \right)^2}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Rozdelenie zrážkového parametra uvažujeme lineárne. Aby sme ho mali aj správne nanormované, budeme ho uvažovať v tvare

$$\rho(b) = \frac{2b}{b_{max}^2 - b_{min}^2} \quad b \in (b_{min}, b_{max}). \tag{3.11}$$

Integrovaním korelačnej funkcie sa opäť dostaneme k chybovej funkcii

$$\begin{aligned}
 &\frac{2e^{\frac{A^4 R^2}{B^2 - A^2}}}{b_{max}^2 - b_{min}^2} \int_{b_{min}}^{b_{max}} b e^{-(B^2 - A^2) \left(\frac{b}{2} - \frac{RB^2}{B^2 - A^2} \right)^2} db = \left[\frac{b}{2} - \frac{RB^2}{B^2 - A^2} = x \right] \\
 &= \frac{8e^{\frac{A^4 R^2}{B^2 - A^2}}}{b_{max}^2 - b_{min}^2} \int_{\frac{b_{min}}{2} - \frac{RB^2}{B^2 - A^2}}^{\frac{b_{max}}{2} - \frac{RB^2}{B^2 - A^2}} \left(x + \frac{RB^2}{B^2 - A^2} \right) e^{-(B^2 - A^2)x^2} dx \\
 &= \frac{8e^{\frac{A^4 R^2}{B^2 - A^2}}}{b_{max}^2 - b_{min}^2} \left[-\frac{e^{-(B^2 - A^2)x^2}}{2(B^2 - A^2)} + \frac{RB^2}{B^2 - A^2} \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{B^2 - A^2}x)}{\sqrt{B^2 - A^2}} \right]_{\frac{b_{min}}{2} - \frac{RB^2}{B^2 - A^2}}^{\frac{b_{max}}{2} - \frac{RB^2}{B^2 - A^2}} \\
 &= \frac{4e^{\frac{A^4 R^2}{B^2 - A^2}}}{(b_{max}^2 - b_{min}^2)(B^2 - A^2)} \left[-e^{-(B^2 - A^2)x^2} + 2RB^2 \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{B^2 - A^2}x)}{\sqrt{B^2 - A^2}} \right]_{\frac{b_{min}}{2} - \frac{RB^2}{B^2 - A^2}}^{\frac{b_{max}}{2} - \frac{RB^2}{B^2 - A^2}}.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$



Obr. 3.5: Vrstevníkový graf preintegrovannej korelačnej funkcie pre parametre $R = 10\text{fm}$, $b_{max} = 14\text{fm}$ a $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$.

3.1.2 Ustredňovanie cez uhol natočenia

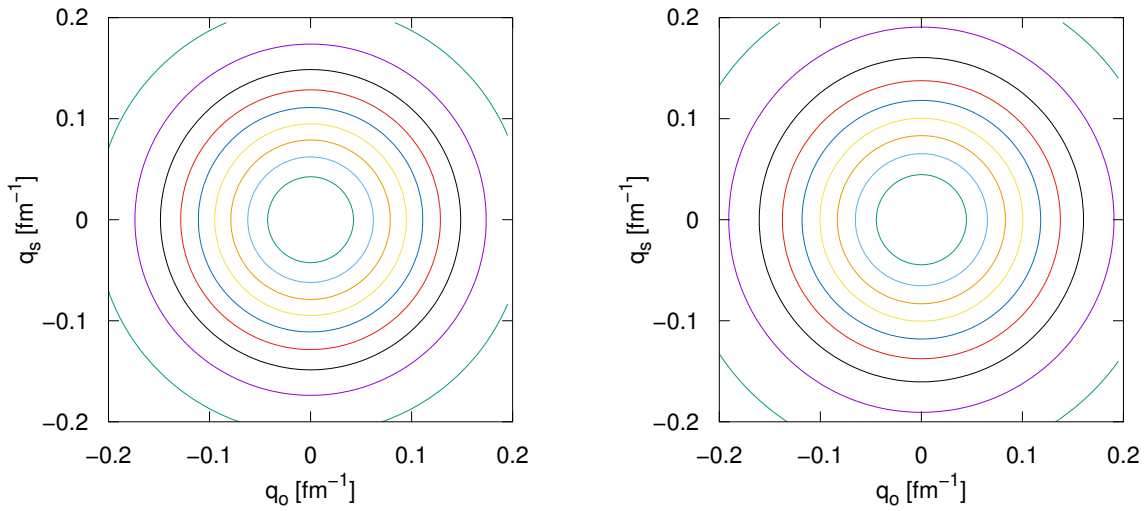
Aby sme ustrednili emisnú funkciu aj cez uhol natočenia, museli by sme integrovať vzniknuté funkcie cez θ_2 . Ani jeden z týchto integrálov sa ale nedá vypočítať analyticky, a preto ich budeme počítat' numericky. Integrovaním cez uhol sa navyše vytratí uhlová závislosť vzniknuté korelačné funkcie sú preto kruhovo symetrické. Na obrázku 3.6 môžeme vidieť výsledok takéhoto integrovania pre rovnomerne aj nerovnomerne rozdelené veľkosti zdroja.

Vrstevníkový graf nám ale nepovie veľa o tom, či sú dané funkcie gaussovské. Zoberieme preto rez takouto funkciou a nafitujeme ju gaussovskou funkciou, aby sme videli, či korelačná funkcia je alebo nie je gaussovská. Konkrétne sme sa pozreli na dva rezy, prvý cez $q_s = 0\text{fm}^{-1}$ a druhý cez $q_s = 0,1\text{fm}^{-1}$. Tieto rezy nafitujeme gaussovskou funkciou a uvidíme, že ustrednenie skutočne zmenilo gaussovskú funkciu na negaussovskú. Tieto rezy korelačnou funkciou sú vykreslené na obr. 3.7.

Vidíme teda, že ustredňovanie cez množstvo udalostí naozaj spôsobuje to, že korelačná funkcia nemusí byť gaussovská aj keď zdroje sú. Radi by sme ale tiež videli, ako veľmi sú tieto korelačné funkcie negaussovské. Na kvantitatívny opis tejto vlastnosti využijeme Lévyho alfa-stabilné rozdelenie, ktoré má všeobecný tvar

$$\phi(x) = \exp(ix\mu - |cx|^\alpha(1 - i\beta\text{sgn}(x)\Phi)). \quad (3.13)$$

Táto trieda rozdelení má celkovo 4 parametre: α , β , μ a c . Pre náš opis tvaru funkcie je najpodstatnejší parameter $\alpha \in (0, 2)$, ktorý sa nazýva parameter stability a určuje, či je funkcia gaussovská a ak nie, tak ako veľmi sa od tohto tvaru líši. Pre gaussovskú



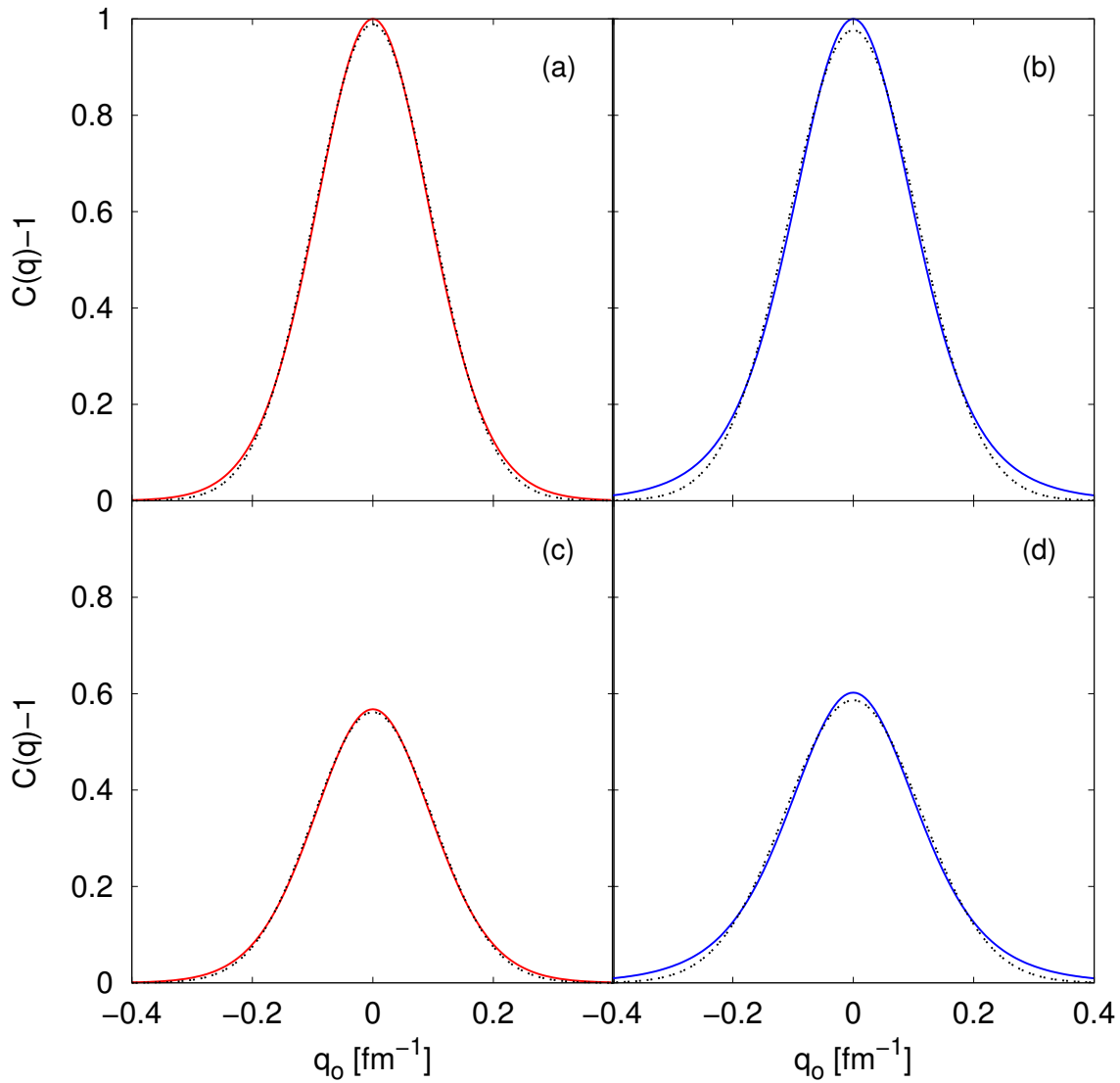
Obr. 3.6: Vrstevnicové grafy uhlovo ustrednených korelačných funkcií pre rovnomerne (hore) a nerovnomerne (dole) rozdelené veľkosti zdroja. Obrázok hore je vykreslený pre parametre $A = 5\text{fm}$ a $B = 10\text{fm}$, obrázok dole pre parametre $R = 10\text{fm}$ a $b_{max} = 14\text{fm}$.

funkciu je $\alpha = 2$, $\alpha = 1$ zase opisuje obyčajnú exponenciálnu funkciu. Parameter β určuje šikmosť rozdelenia, no my máme kruhovo symetrickú korelačnú funkciu, takže môžeme uvažovať $\beta = 0$. Parameter μ určuje strednú hodnotu¹, čo je v našom prípade taktiež $\mu = 0$. Nakoniec parameter c určuje šírku rozdelenia a v našom prípade tak zodpovedá korelačnému polomeru. Našu korelačnú funkciu tak dáme rovnú Lévyho rozdeleniu v tvare

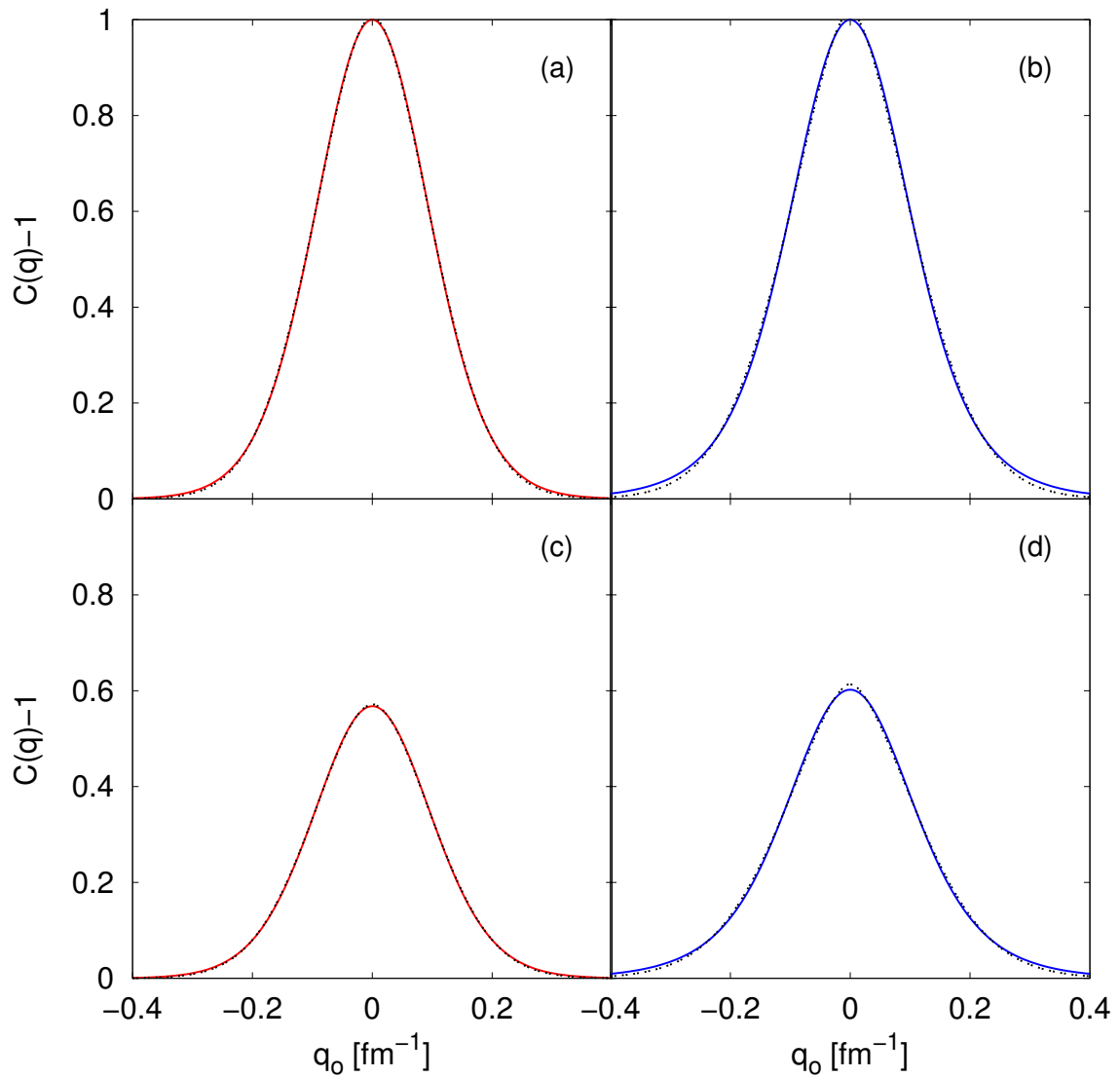
$$C(q) - 1 = \exp(-|qR|^\alpha). \quad (3.14)$$

Rovnaké rezy korelačnou funkciou nafitujeme tentokrát Lévyho rozdelením. Tieto grafy sú znázornené na obr. 3.8. Z obrázkov vidíme, že tento fit sedí na korelačnú funkciu oveľa lepšie ako gaussovský fit. Nafitovaním dostávame pre jednotlivé obrázky hodnoty 3.8a: $\alpha = 1,866 \pm 0,004$, 3.8b: $\alpha = 1,70 \pm 0,01$, 3.8c: $\alpha = 1,866 \pm 0,004$ a 3.8d: $\alpha = 1,68 \pm 0,01$. Tieto čísla ukazujú, že stačí uvažovať rovnomerne rozdelené veľkosti zdroja a výsledok už nebude gaussovský. Ak ale uvažujeme, že veľkosť zdroja závisí na zrážkovom parametri, ustrednená korelačná funkcia sa bude od gaussovskej líšiť ešte viac.

¹iba pre $\alpha > 1$, inak stredná hodnota nie je definovaná.



Obr. 3.7: Rezy korelačnou funkciou. V ľavom stĺpci je červenou čiarou znázornený rez ustrednenej korelačnej funkcie rovnobežne s osou q_0 pre rovnomerné rozdelenie veľkosti zdroja, v pravom stĺpci je modrou čiarou znázornený rovnaký rez ale pre nerovnomerné rozdelenie veľkosti zdroja. V hornom riadku sú rezy kreslené pre $q_s = 0 \text{ fm}^{-1}$ a v dolnom pre $q_s = 0,1 \text{ fm}^{-1}$. Vo všetkých obrázkoch je čiernou čiarkovanou čiarou znázornený gaussovský fit tejto funkcie.



Obr. 3.8: Rezy korelačnou funkciou. Rovnako ako v predchádzajúcom obrázku je v ľavom stĺpci rez ustrednenej korelačnej funkcie pre rovnomerné rozdelenie veľkosti zdroja a v pravom stĺpci pre nerovnomerné rozdelenie veľkosti zdroja. V hornom riadku sú rezy kreslené pre $q_s = 0 \text{ fm}^{-1}$ a v dolnom pre $q_s = 0,1 \text{ fm}^{-1}$. Vo všetkých obrázkoch je v tomto prípade čiernou čiarkovanou čiarou znázornený Lévy fit tejto funkcie. Hodnoty Lévyho parametra α sú (a) $1,866 \pm 0,004$, (b) $1,70 \pm 0,01$, (c) $1,866 \pm 0,004$ a (d) $1,68 \pm 0,01$.

3.2 Ustredňovanie v Blast-wave modeli

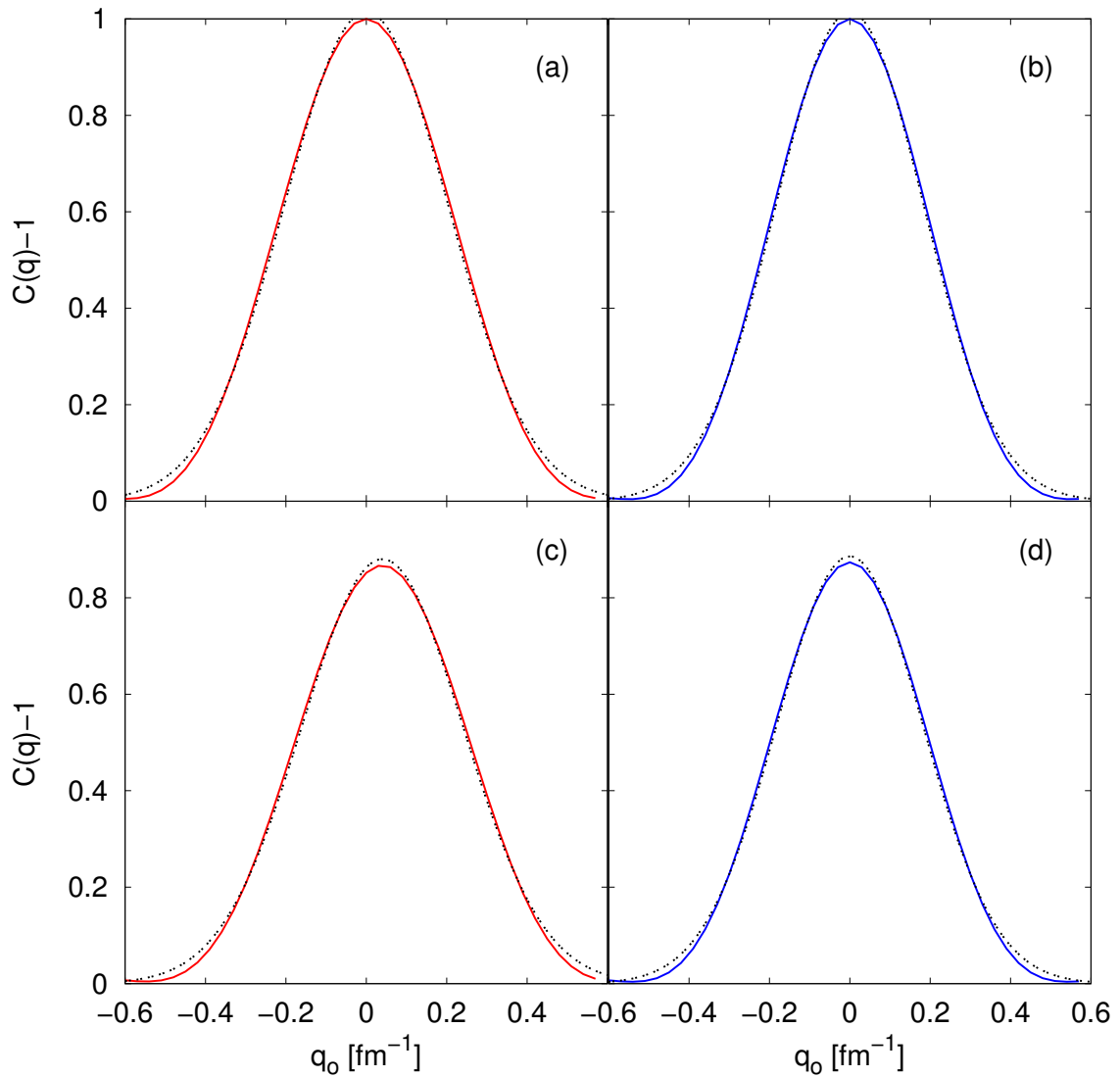
Doteraz sme hovorili o ustredňovaní gaussovských emisných funkcií. Teraz sa pozrieme, ako ustredňovanie ovplyvňuje realistickejšie emisné funkcie. Emisná funkcia v Blast-wave modeli je definovaná vzťahom (1.20). Korelačnú funkciu takejto emisnej funkcie vypočítame podľa vzťahu (2.4).

3.2.1 Ustredňovanie cez uhol natočenia

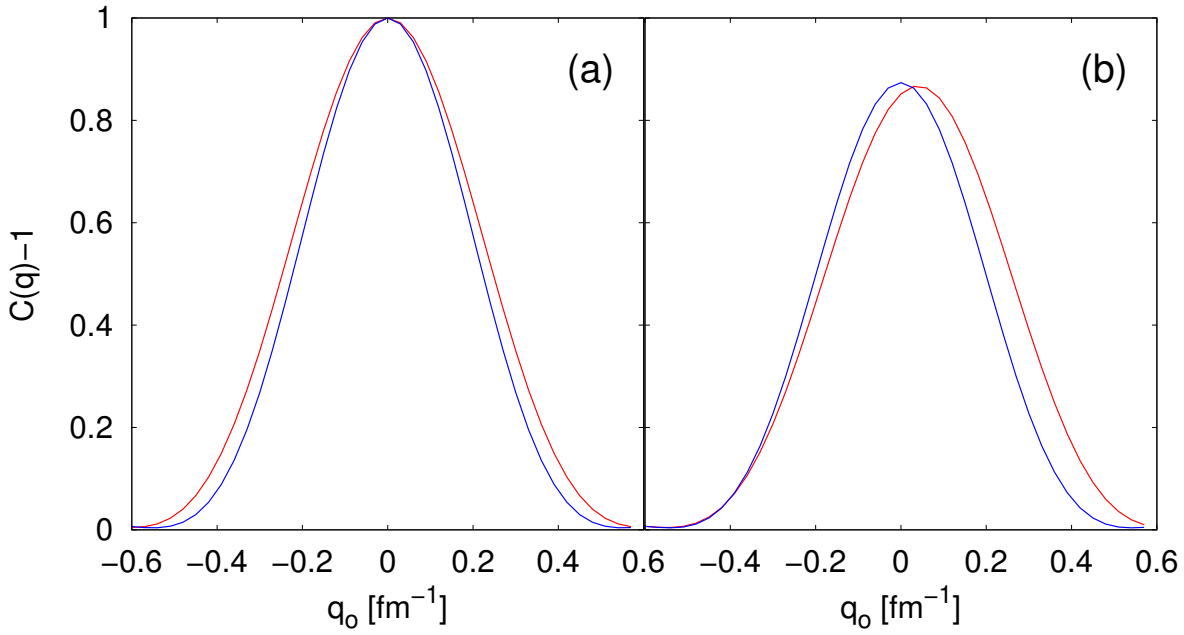
Najskôr sa pozrieme iba na to, ako ovplyvňuje tvar korelačnej funkcie ustredňovanie cez uhol θ_2 . V tomto prípade neuvažujeme anizotropiu tretieho rádu a parametre anizotropie druhého rádu nastavíme na hodnoty $a_2 = \rho_2 = 0, 2$. Ostatné parametre Blast-wave modelu nastavíme na hodnoty $\tau_0 = 10$ fm, $\Delta\tau = 1$ fm, $R_0 = 7$ fm, $T = 120$ MeV, $\rho_0 = 0, 8$, $m_\pi = 139, 57$ MeV a $p_t = 300$ MeV.

Korelačnú funkciu sme teda integrovali cez uhol θ_2 . Na obrázku 3.9 sú vykreslené grafy pred² a po uhlovom ustrednení a tiež ukážka toho, ako gaussovský fit nedokáže správne nafitovať korelačnú funkciu. Keď nafitujeme korelačnú funkciu Lévyho rozdelením podľa vzťahu (3.14), dostaneme, že v hornom riadku sa hodnota α mení z hodnoty $\alpha = 2, 215 \pm 0, 018$ pre neustrednenú korelačnú funkciu na $\alpha = 2, 202 \pm 0, 017$ po ustrednení. Ak sa pozrieme na rez, ktorý neprechádza počiatkom, mení sa ustrednením parameter z hodnoty $\alpha = 2, 219 \pm 0, 018$ na $\alpha = 2, 205 \pm 0, 018$. Obe hodnoty tak ustrednením klesli zhruba o pol percenta. Aby sme si túto hodnotu lepšie predstavili, vykreslili sme korelačnú funkciu pred ustrednením a po ustrednení do jedného obrázku (obr. 3.10). Tu je vidno skutočný vplyv ustredňovania na tvar korelačnej funkcie.

²s uhlom natočenia $\theta_2 = \pi/6$



Obr. 3.9: Rezy korelačnou funkciou. V ľavom stĺpci je červenou čiarou znázornený rez neustrednenej korelačnej funkcie blast-wave modelu rovnobežne s osou q_o , v pravom stĺpci je modrou čiarou znázornený rovnaký rez ale uhlovo ustrednenej korelačnej funkcie. V hornom riadku sú rezy kreslené pre $q_s = 0 \text{ fm}^{-1}$ a v dolnom pre $q_s = 0,1 \text{ fm}^{-1}$. Vo všetkých obrázkoch je čiernou čiarkovanou čiarou znázornený gaussovský fit tejto funkcie.



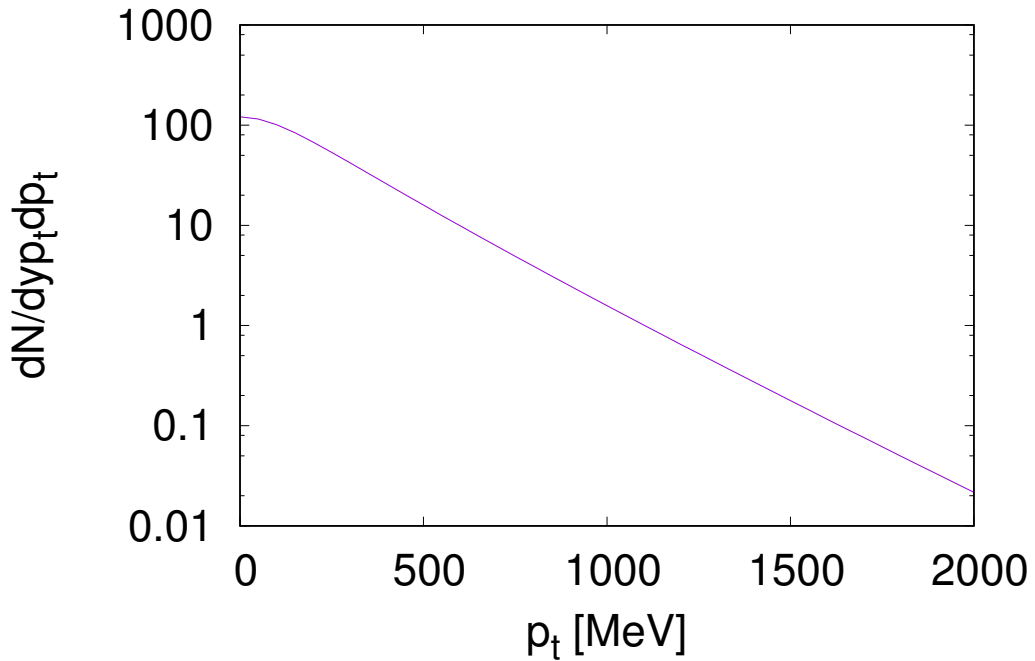
Obr. 3.10: Porovnanie neustrednenej a ustrednenej korelačnej funkcie Blast-wave modelu. Na obrázku sú červenou čiarou znázornené neustrednené korelačné funkcie a modrou čiarou uhlovo ustrednené korelačné funkcie, pričom je vždy vykreslený iba rez korelačnou funkciou cez $q_s = 0 \text{ fm}^{-1}$ (vľavo) alebo $q_s = 0.1 \text{ fm}^{-1}$ (vpravo).

3.2.2 Ustredňovanie cez priečnu hybnosť

Posledná vec, na ktorú sa v tejto kapitole pozrieme, je ustredňovanie cez priečnu hybnosť. Keď sme uvažovali čistú gaussovskú emisnú funkciu, nemali sme tam závislosť od priečnej hybnosti a preto toto ustrednenie nebolo možné. Emisná funkcia Blast-wave modelu ale závisí okrem štvorvektoru polohy aj od štvorvektoru hybnosti.

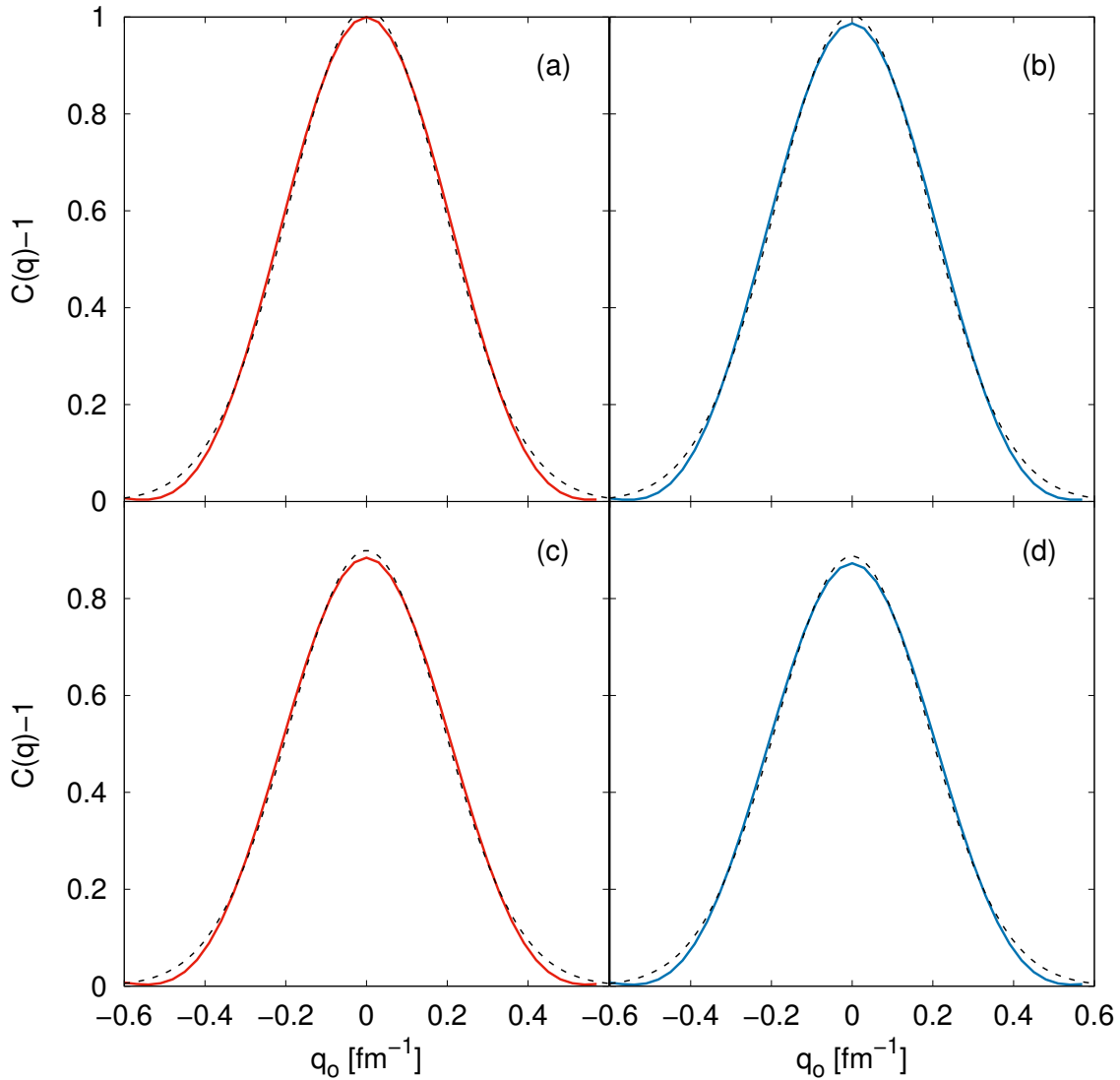
Prieč na hybnosť mení korelačnú funkciu bez ohľadu na to, či tam máme nejaké anizotropie. Preto nastavíme hodnoty parametrov anizotropií na $a_2 = a_3 = \rho_2 = \rho_3 = 0$. Ostatné parametre Blast-wave nastavíme rovnako ako pri poslednom výpočte. Výslednú korelačnú funkciu budeme integrovať cez priečnu hybnosť v rozmedzí od 0 MeV do 1 GeV. Prieč na hybnosť častíc ale nie je rozdelená rovnomerne, jedná sa o približne exponenciálne rozdelenie $\rho(p_t) \propto \exp(-kp_t)$. Hybnostné spektrum sa dá vypočítať priamo integrovaním emisnej funkcie a pre naše parametre je spektrum vykreslené na obrázku 3.11. Nafitovaním tohto spektra exponenciálnou funkciou sme určili hodnotu parametra $k = 0,0043 \text{ MeV}^{-1}$. Aby bolo toto rozdelenie správne nanormované, musíme ho uvažovať v tvare

$$\rho(p_t) = ke^{-kp_t}. \quad (3.15)$$

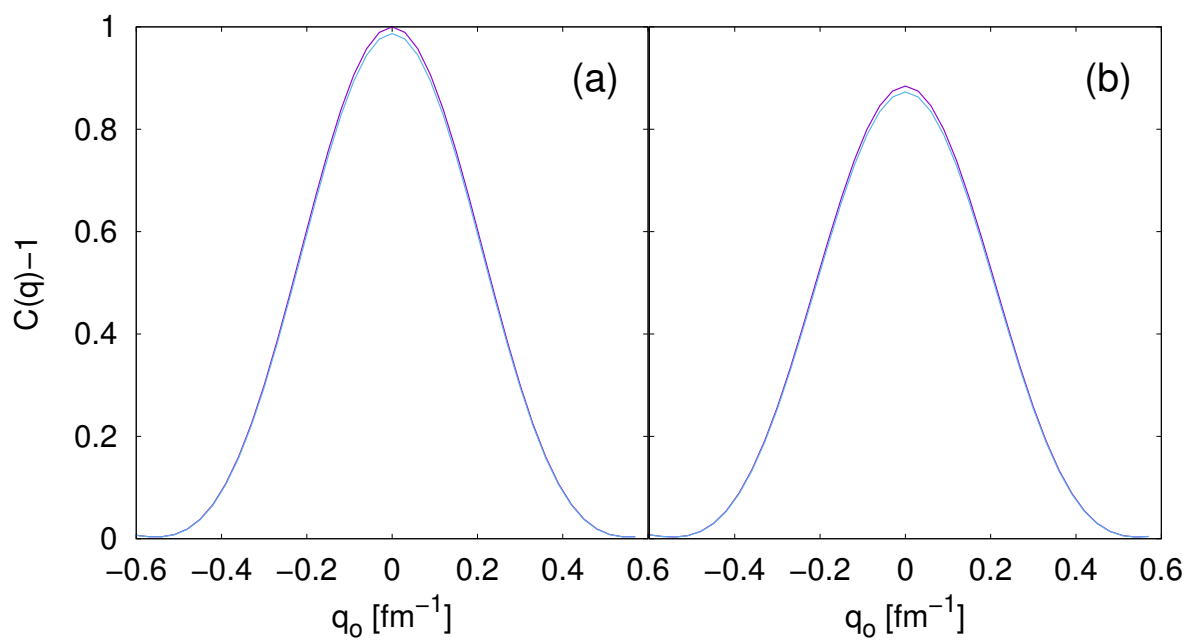


Obr. 3.11: Hybnostné spektrum Blast-wave modelu vypočítané integrovaním emisnej funkcie pre parametre $a_2 = a_3 = \rho_2 = \rho_3 = 0$, $\tau_0 = 10$ fm, $\Delta\tau = 1$ fm, $R_0 = 7$ fm, $T = 120$ MeV, $\rho_0 = 0,8$ a $m_\pi = 139,57$ MeV.

Preintegrovaním korelačnej funkcie cez priečnu hybnosť a spravením rezov touto korelačnou funkciou určíme vplyv ustredňovania cez hybnosť na tvar korelačnej funkcie. Na obrázku 3.12 sme okrem preintegrovannej korelačnej funkcie vykreslili aj korelačnú funkciu pre $p_t = 300$ MeV. Keď nafitujeme tieto grafy Lévyho rozdelením, dostaneme hodnoty parametru α nasledovne: 3.12a: $\alpha = 2,109 \pm 0,007$, 3.12b: $\alpha = 2,108 \pm 0,007$, 3.12c: $\alpha = 2,109 \pm 0,008$ a 3.12d: $\alpha = 2,109 \pm 0,008$. Najlepšie uvidíme zmeny, keď opäť preložíme výsledné korelačné funkcie pred a po ustrednení cez seba. Takýto graf je znázornený na obr. 3.13. Z tohto grafu a tiež z hodnôt parametra α môžeme usúdiť, že ustredňovanie cez priečnu hybnosť neovplyvňuje tvar korelačnej funkcie tak veľmi, ako uhlové ustredňovanie.



Obr. 3.12: Rezy korelačnou funkciou. V ľavom stĺpci je červenou čiarou znázornený rez neustrednenej korelačnej funkcie blast-wave modelu rovnobežne s osou q_0 pre $p_t = 300$ MeV, v pravom stĺpci je modrou čiarou znázornený rovnaký rez ale korelačnej funkcie ustrednenej cez priečnu hybnosť. V hornom riadku sú rezy kreslené pre $q_s = 0$ fm⁻¹ a v dolnom pre $q_s = 0,1$ fm⁻¹. Vo všetkých obrázkoch je čiernou čiarkovanou čiarou znázornený gaussovský fit tejto funkcie.



Obr. 3.13: Porovnanie korelačnej funkcie Blast-wave modelu neustrednenej a ustrednenej cez priečnu hybnosť. Na obrázku sú červenou čiarou znázornené neustrednené korelačné funkcie pre $p_t = 300$ MeV a modrou čiarou korelačné funkcie ustrednené cez priečnu hybnosť, pričom je vždy vykreslený iba rez korelačnou funkciou cez $q_s = 0 \text{ fm}^{-1}$ (vľavo) alebo $q_s = 0.1 \text{ fm}^{-1}$ (vpravo).

Kapitola 4

Simulácia produkcie častíc

V druhej časti tejto práce sa budeme venovať simuláciám a triedeniu udalostí a následnému počítaniu korelačných funkcií a korelačných polomerov. Zaujímá nás, aký je rozdiel, keď robíme korelačnú femtoskopiu na všetkých udalostiach alebo iba na určitej časti udalostí, ktoré sú si navzájom podobné svojim tvarom. Domnievame sa, že v takom prípade by mali podobné udalosti vykazovať také anizotropie, v ktorých bude viditeľný druhý aj tretí rád.

V tejto kapitole sa budeme zatiaľ venovať iba simulovaniu častíc a korelačnej femtoskopii, pri ktorej budeme sumovať cez všetky udalosti.

4.1 Generátory udalostí

Na vygenerovanie udalostí využijeme tri rôzne generátory, ktoré sú založené na rôznych princípoch. Vo všetkých troch prípadoch sa jedná o voľne dostupný softvér.

4.1.1 DRAGON

DRAGON [10] je program, ktorý generuje častice produkované v ultrarelativistických jadrových zrážkach metódou Monte Carlo. Je založený na blast-wave modeli. Hlavným rozdielom medzi DRAGON-om a inými generátormi je v tom, že tento program negeneruje zrážku, ale generuje priamo tvar horúcej hmoty ktorá vznikla po zrážke. Do tohto programu tak nevstupujú parametre ako energia zrážky, zrážkový parameter alebo počet nukleónov v jadre, ale napr. parametre anizotropií horúcej hmoty.

Ako prvé DRAGON generuje tvar horúcej hmoty. To znamená, že sa vygenerujú parametre anizotropií z blast-wave modelu a_n , ρ_n a θ_n . Program je upravený tak, že uvažuje okrem anizotropie druhého rádu aj tretí rád. V horúcej hmote sú následne generované častice. Tie dostanú priradený štvorvektor polohy a štvorhybnosť. Program zahŕňa tiež voliteľnú produkciu rezonancií, ktoré sa ešte pred detekciou rozpadajú na ďalšie častice.

Parametre anizotropií sú generované s rovnomerným rozdelením v intervale $-0,1$ až $0,1$ pre druhý rád a v intervale $-0,03$ až $0,03$ pre tretí rád anizotropií. Uhly θ_n sú generované rovnomerne z intervalu $\langle 0; 2\pi/n \rangle$. Výstupom programu je súbor so zoznamom častíc vo formáte OSCAR1997A, t.j. každá udalosť začína riadkom s poradovým číslom udalosti a s počtom častíc v danej udalosti. Potom nasleduje pre každú časticu riadok s poradovým číslom častice, identifikačným číslom častice [11], štvorhybnosťou, hmotnosťou a štvorvektorom polohy.

DRAGON má implementovanú aj tvorbu dropletov, ktorú sme však nepotrebovali uvažovať a tak sme túto funkciu nechali vypnutú. Tvorbu rezonancií sme naopak nechali zapnutú. Hranice pozdĺžnej rapidity sme nastavili v rozmedzí -5 až 5 , pričom do súboru sa budú vypisovať iba častice s rapiditou v rozmedzí -1 až 1 . Rozdelenie pozdĺžnej rapidity je rovnomerné v rámci hraníc.

Ďalšie parametre programu sme nastavili podľa tabuľky 4.1.

Tabuľka 4.1: Tabuľka nastavených hodnôt programu DRAGON

T_{fo}	0,120 GeV	kinetická teplota vymrznutia
T_{ch}	0,1656 GeV	chemická teplota vymrznutia
μ_b	0,028 GeV	baryochemický potenciál
μ_s	0,0069 GeV	chemický potenciál podivnosti
$\varrho(E)$	0,7 GeV.fm ⁻³	hustota energie
dN/dY	1600	počet častíc na jednotku pozdĺžnej rapidity
R	7 fm	polomer horúcej hmoty
τ_0	10 fm/c	Bjorkenova doba života
ρ_0	0,8	parameter priečnej rapidity

DRAGON je veľmi rýchly generátor práve vďaka tomu, že negeneruje celé zrážky, iba horúcu hmotu. Program dokáže vygenerovať behom 24 hodín zhruba $5 \cdot 10^5$ udalostí, táto rýchlosť sa však môže meniť v závislosti od nastavenia parametrov.

Prvou vzorkou dát, ktorú budeme ďalej spracovávať, je 150 000 udalostí vygenerovaných DRAGON-om. Jedná sa o jedinú vzorku vygenerovanú týmto generátorom, a preto ju budeme označovať *DRAGON*.

4.1.2 AMPT

AMPT [12] je ďalším generátorom udalostí. Ako už ale bolo spomenuté, tento program generuje celé zrážky. Najskôr sú teda vygenerované jadrá, ďalej zrážky medzi jednotlivými nukleónmi a následne produkcia častíc.

AMPT model má štyri hlavné časti: počiatkové podmienky, partónové interakcie, prechod z partónovej hmoty do hadrónovej hmoty a hadrónové interakcie. Na genero-

vanie počiatočných podmienok je použitý HIJING model [13, 14, 15, 16], rozptyl partónov je modelovaný pomocou ZPC [17]. Partóny sú rekombinované s využitím lundského strunového fragmentačného modelu [18, 19, 20] a dynamika hadrónovej hmoty je založená na ART modeli [21, 22].

V AMPT tiež nemáme možnosť priamo kontrolovať anizotropie nejakým parametrom, keďže sú častice generované priamo zo simulovanej zrážky. Jediný parameter, ktorým môžeme ovplyvniť anizotropiu je zrážkový parameter. Oproti tomu DRAGON generuje častice z horúcej hmoty, ktorej parametre sme schopní do programu priamo zaviesť. Aby sme v udalostiach videli anizotropiu, vybrali sme udalosti so zrážkovým parametrom 7 až 10 fm. Podľa obr. 3.3 to odpovedá rozmedziu centrality približne 20 – 40%.

AMPT má veľkú výhodu v tom, že dokáže veľmi dobre generovať zrážky pri širokom spektre energií. Využijeme to a pre porovnanie vygenerujeme dve vzorky dát: jednou vzorkou bude zrážka Pb-Pb pri energii na LHC a druhou zrážka Au-Au pri energii na RHIC.

Najskôr sme generovali udalosti zo zrážok jadier olova $^{208}_{82}\text{Pb}$. Energiu zrážky sme nastavili na hodnotu $\sqrt{s_{NN}} = 2760\text{ GeV}$, čo odpovedá energii zrážky na LHC. Následne sme generovali udalosti zo zrážok jadier zlata $^{197}_{79}\text{Au}$. Energiu tejto zrážky sme nastavili na $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{ GeV}$, čo odpovedá energii zrážky na urýchľovači RHIC.

Ostatné parametre programu týkajúce sa jednotlivých krokov programu sme nechali na predvolených hodnotách podľa tabuľky 4.2.

Tabuľka 4.2: Tabuľka nastavených hodnôt programu AMPT

NTMAX	1000	počet časových krokov
DT	0,2 fm	veľkosť časového kroku
a	2,2	parameter lundskej symetrickej rozdeľovacej funkcie
b	0,5	parameter lundskej symetrickej rozdeľovacej funkcie
μ	$2,097\text{ fm}^{-1}$	partónová tieniaca hmotnosť ¹
α	0,47	parameter v ZPC

Tento generátor je fyzikálnejší a realistickejší ako DRAGON, avšak je časovo rádovo náročnejší a tak je počet udalostí, ktoré sme schopní vygenerovať, obmedzený. V priebehu 24 hodín je AMPT schopné vygenerovať zhurba 200 udalostí ale opäť to závisí od nastavenia parametrov. Aj s použitím paralelného generovania udalostí sú tak naše možnosti obmedzené. Pre obe vzorky sme tak vygenerovali 10 000 udalostí. Tieto dve vzorky budeme označovať ako *AMPT-LHC* a *AMPT-RHIC*.

¹štvorec prevrátenej hodnoty tohto parametra je úmerný účinnému prierezu partónov

4.1.3 UrQMD

UrQMD [23, 24] je tretí generátor, ktorý budeme používať. Jedná sa o mikroskopický transportný model založený na popise reakcie vo fázovom priestore. Tento model je o niečo starší ako AMPT.

Model začína inicializáciou projektilového a terčíkového jadra. Tieto jadrá sú modelované podľa ansatzu Fermiho plynu. Nukleóny sú reprezentované Gaussovskou hustotou pravdepodobnosti. Následná interakcia je založená na nerelativistickej stavovej rovnici Skyrmeho typu závislej od hustoty, doplnená Yukawovským a Coulombickým potenciálom. Hadrónové zrážky sú uvažované stochasticky. Účinný prierez je interpretovaný geometricky ako plocha.

Nevýhodou tohto modelu je, že na výpočty používa mriežku v súradniciach z a t namiesto modernejšieho prístupu pomocou τ a η . Problém nastáva pri energiách na LHC. Vtedy je γ -faktor zrážky tak veľký, že celé jadro je tenšie, ako je vzdialenosť medzi mriežkovými bodmi. To znamená, že UrQMD nemôžeme používať pre zrážky jadier pri energiách na LHC.

Vygenerovali sme teda zrážky jadier zlata $^{197}_{79}\text{Au}$ pri energii $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. Zrážkový parameter sme nechali generovať z intervalu 7 až 10 fm. Ďalšie parametre programu sme nechali na predvolených hodnotách podľa užívateľského manuálu [25].

UrQMD pracuje rýchlejšie ako AMPT, no zďaleka nie tak rýchlo ako DRAGON. Je však realistickejší ako DRAGON. Program dokáže behom 24 hodín vygenerovať zhruba 5 000 udalostí na jednom CPU, naša vzorka obsahuje 100 000 udalostí a budeme ju označovať *URQMD*.

4.2 Počítanie korelačných funkcií

Na počítanie korelačných funkcií použijeme program CRAB [26]. Jedná sa o program, ktorý generuje korelačné funkcie. Vstupom do programu je súbor s bodmi fázového priestoru, ktorý opisuje konečnú štvorhybnosť a polohu generovania častice. Program vyberá dvojice častíc a počíta korelácie medzi nimi. CRAB zároveň dokáže generovať korelačné funkcie s dôrazom na priemerovanie cez zrážkový parameter, experimentálnu akceptanciu či kinematické rezy.

CRAB má tiež implementované korekcie na Coulombovskú interakciu medzi nabitými časticami a tiež na silnú interakciu. Tieto korekcie sme však nechali vypnuté, aby nám pre $\vec{q} = 0$ vznikalo maximum a nie minimum. V experimentálnych dátach, kedy výsledky obsahujú aj Coulombovskú a silnú interakciu, sa to prejavuje práve poklesom korelačnej funkcie pre $\vec{q} \rightarrow 0$.

Výstupom programu je závislosť korelačnej funkcie na vektore \vec{q} , pričom je možnosť zvoliť si, či má byť výstup jednorozmerný závislý na q_{inv} alebo trojrozmerný závislý od

zložiek q_o , q_s a q_l . Keďže je našim cieľom fitovať korelačnú funkciu vo všetkých troch rozmeroch, zvolili sme práve druhý spomenutý výstup. Ďalej si v programe môžeme zvoliť rozmedzie zložiek vektora \vec{q} a počet bodov, pre ktoré sa bude korelačná funkcia generovať. My sme si zvolili, aby program generoval korelačnú funkciu pre 10 bodov v rozmedzí 0 až 50 MeV pre každý smer², teda dokopy 1000 bodov.

V programe je tiež možnosť vytvoriť filtre na častice. Program prirodzene vyberá zo všetkých častíc iba pióny. Dá sa nastaviť aj filter na priechnu hybnosť častíc, no pre lepšiu štatistiku sme žiadny filter nenastavili a korelačné funkcie sme počítali z častíc s ľubovoľnými priechnymi hybnosťami.

Dôležitým parametrom programu je počet párov, ktoré chceme vygenerovať. Väčšie množstvo párov znižuje nepresnosť výsledkov, no tiež zvyšuje časovú náročnosť výpočtov. Pre našu prácu sme používali $5 \cdot 10^8$ generovaných párov častíc, nakoľko časová náročnosť je zhruba 24 hodín a nepresnosť vypočítanej korelačnej funkcie je menšia ako 0,3%.

Korelačnú funkciu následne nafitujeme gaussovskou funkciou v tvare

$$C(\vec{q}) = 1 + \exp(-R_o^2 q_o^2 - R_s^2 q_s^2 - R_l^2 q_l^2) \quad (4.1)$$

odkiaľ dostaneme korelačné polomery R_o , R_s a R_l . My budeme skúmať azimutálnu závislosť týchto korelačných polomerov. Tú si môžeme rozvinúť do Fourierovho radu ako

$$R_\mu^2 = (R_\mu^2)_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (R_\mu^2)_n \cos(n(\phi - \delta_n)), \quad (4.2)$$

pričom nás budú zaujímať relatívne koeficienty Fourierovho radu v tvare $(R_\mu^2)_n / (R_\mu^2)_0$.

4.3 Azimutálna závislosť korelačných polomerov

Máme teda vygenerované 4 vzorky udalostí: *DRAGON* (150 000 udalostí), *AMPT-RHIC* (10 000 udalostí), *AMPT-LHC* (10 000 udalostí) a *URQMD* (100 000 udalostí). V každej z udalostí sú vygenerované častice letiace rôznym smerom. Keď spravíme azimutálny histogram toho, do ktorého smeru častice jednej udalosti letia, dostaneme tvar udalosti, ktorý bude kvôli necentralite zrážok vyzeráť ako kombinácia harmonických funkcií.

V nasledujúcej kapitole sa budeme venovať triedeniu udalostí práve podľa tohto tvaru. Budeme sa snažiť usporiadať udalosti tak, aby tie, ktoré majú podobný tvar, boli vedľa seba. Platí však, že nám môžu vzniknúť dve veľmi podobné udalosti, ktorú sú akurát rôzne otočené. Na určenie toho, ktorým smerom je vlastne udalosť otočená

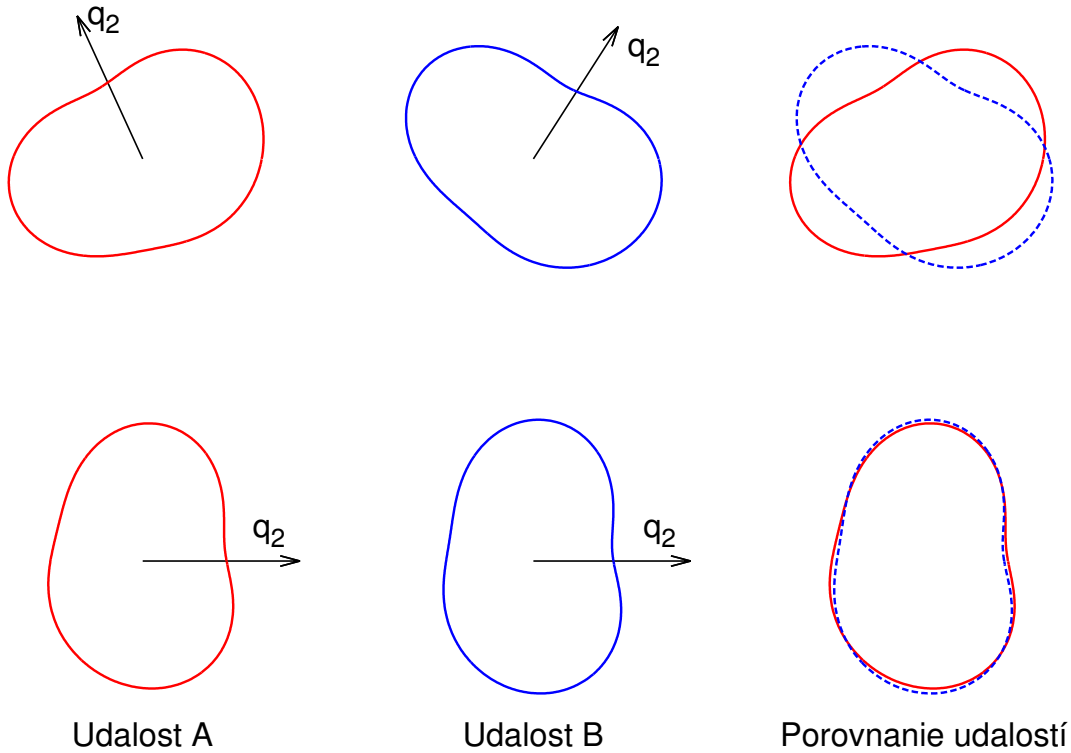
²t.j. bude vygenerovaná korelačná funkcia pre body $\vec{q} = (2, 5; 2, 5; 2, 5)$ MeV, $\vec{q} = (2, 5; 2, 5; 7, 5)$ MeV, $\vec{q} = (2, 5; 2, 5; 12, 5)$ MeV atď až po $\vec{q} = (47, 5; 47, 5; 47, 5)$ MeV.

využijeme vektor \vec{q}_n definovaný vzťahom

$$\vec{q}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{i=1}^N \cos(n\phi_i), \sum_{i=1}^N \sin(n\phi_i) \right), \quad (4.3)$$

kde N je počet častíc v jednej udalosti. Tento vektor v podstate opisuje, ktorým smerom je natočená n -tá harmonická funkcia. Je teda zrejmé, že tento vektor úzko súvisí s uhlami θ_n , ktoré sme mali zavedené ako parameter v blast-wave modeli. Uhly θ_n však nie sú experimentálne merateľné, a navyše sú definované iba v blast-wave modeli, čo znamená, že by sme ich mohli využiť iba pri vzorke *DRAGON*.

Ešte predtým, ako začneme udalosti triediť, otočíme všetky udalosti tak, aby vektor \vec{q}_2 smeroval rovnobežne s osou x . Vyhne sa tak situácií, kedy by boli dve udalosti podobné, len rôzne natočené (viď obr. 4.1).



Obr. 4.1: Aj udalosti, ktoré na prvý pohľad vyzerajú odlišne môžu byť veľmi podobné, len rôzne natočené. Tým, že všetky udalosti nasmerujeme tak, aby mali rovnaký smer vektoru \vec{q}_2 , nájdeme aj podobnosť takýchto udalostí.

Preto musíme najprv pre každú jednu udalosť spočítať vektor \vec{q}_2 . Každú časticu z danej udalosti potom otočíme prenasobením maticou rotácie o uhol polovičný oproti tomu, ktorý zvierá \vec{q}_2 s osou x . Tým docielime, že všetky udalosti budú mať $\theta_2 \approx 0$.

Keďže teraz máme všetky udalosti rovnako natočené, vieme, že anizotropia druhého rádu sa medzi jednotlivými udalosťami nasčíta, zatiaľ čo anizotropia tretieho rádu sa

navzájom vyruší. Výsledkom je, že pri počítaní korelačných polomerov a ich azimutálnej závislosti môžeme vidieť anizotropiu druhého rádu.

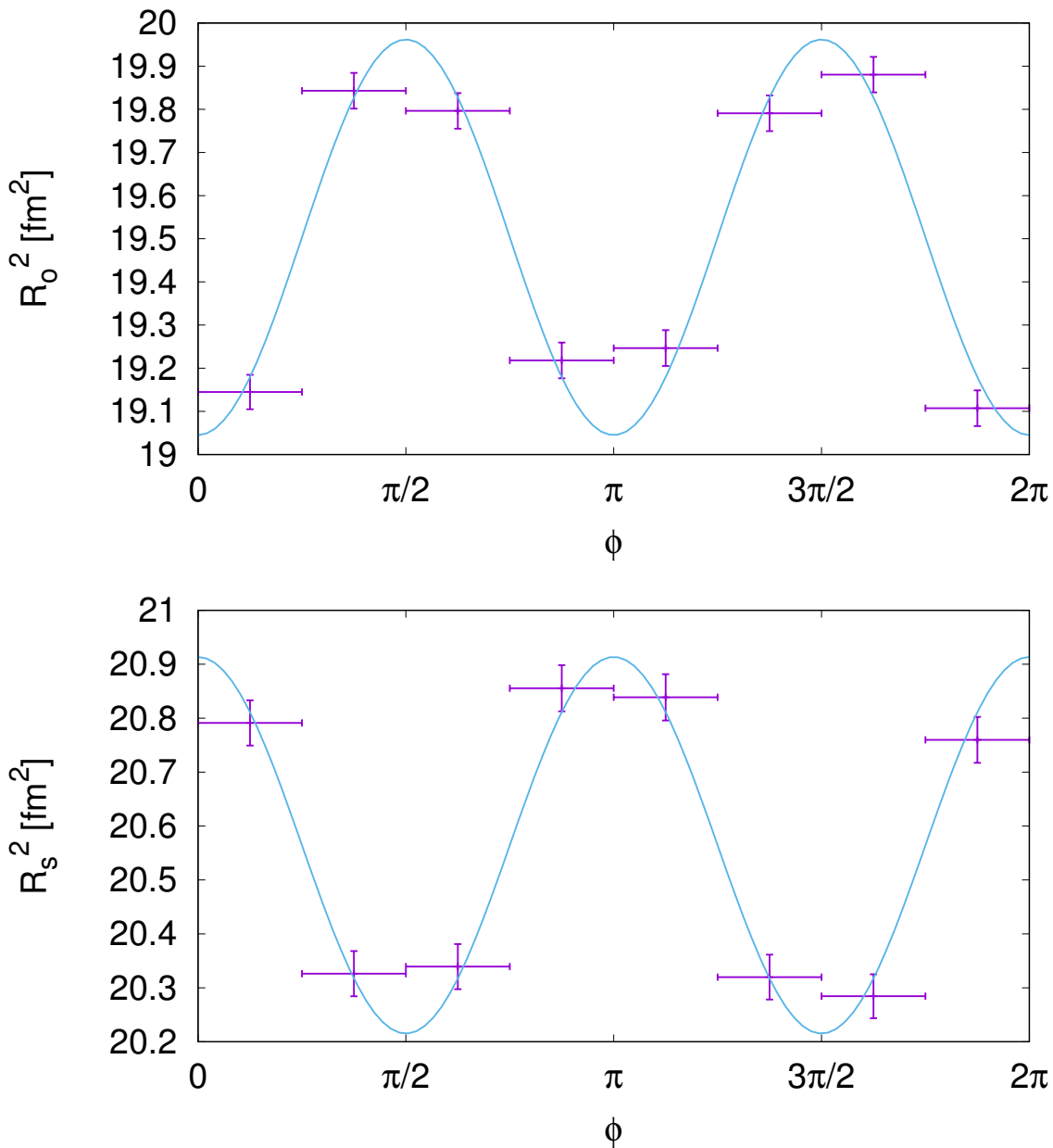
Na určovanie azimutálnej závislosti korelačných polomerov musíme najskôr roztriediť jednotlivé častice. Vo všetkých udalostiach sme potriedili častice podľa ich štvorhybnosti do ôsmich uhlových košov. To znamená, že ak hybnosť častice v priechnej rovine smeruje medzi uhlami 0 a $\pi/4$, pôjde častica do prvého koša. Ak táto hybnosť smeruje medzi uhlami $\pi/4$ a $\pi/2$, pôjde častica do druhého koša atď. Vo výsledku tak budeme mať súbory, v ktorých bude rovnako veľa udalostí, no v každej udalosti bude iba zhruba osmina počtu častíc, ktorá sa tam nachádzala pred triedením.

Z každého koša tak môžeme pomocou programu CRAB vypočítať 3D korelačnú funkciu. Tá zakaždým odpovedá inému intervalu azimutu. Nafitovaním korelačnej funkcie gaussovskou funkciou podľa vzťahu (4.1) následne dostaneme korelačné polomery. Túto procedúru sme aplikovali na všetky 4 vzorky a výsledkom sú grafy na obrázkoch 4.2 pre *DRAGON*, 4.3 pre *URQMD*, 4.4 pre *AMPT-RHIC* a 4.5 pre *AMPT-LHC*.

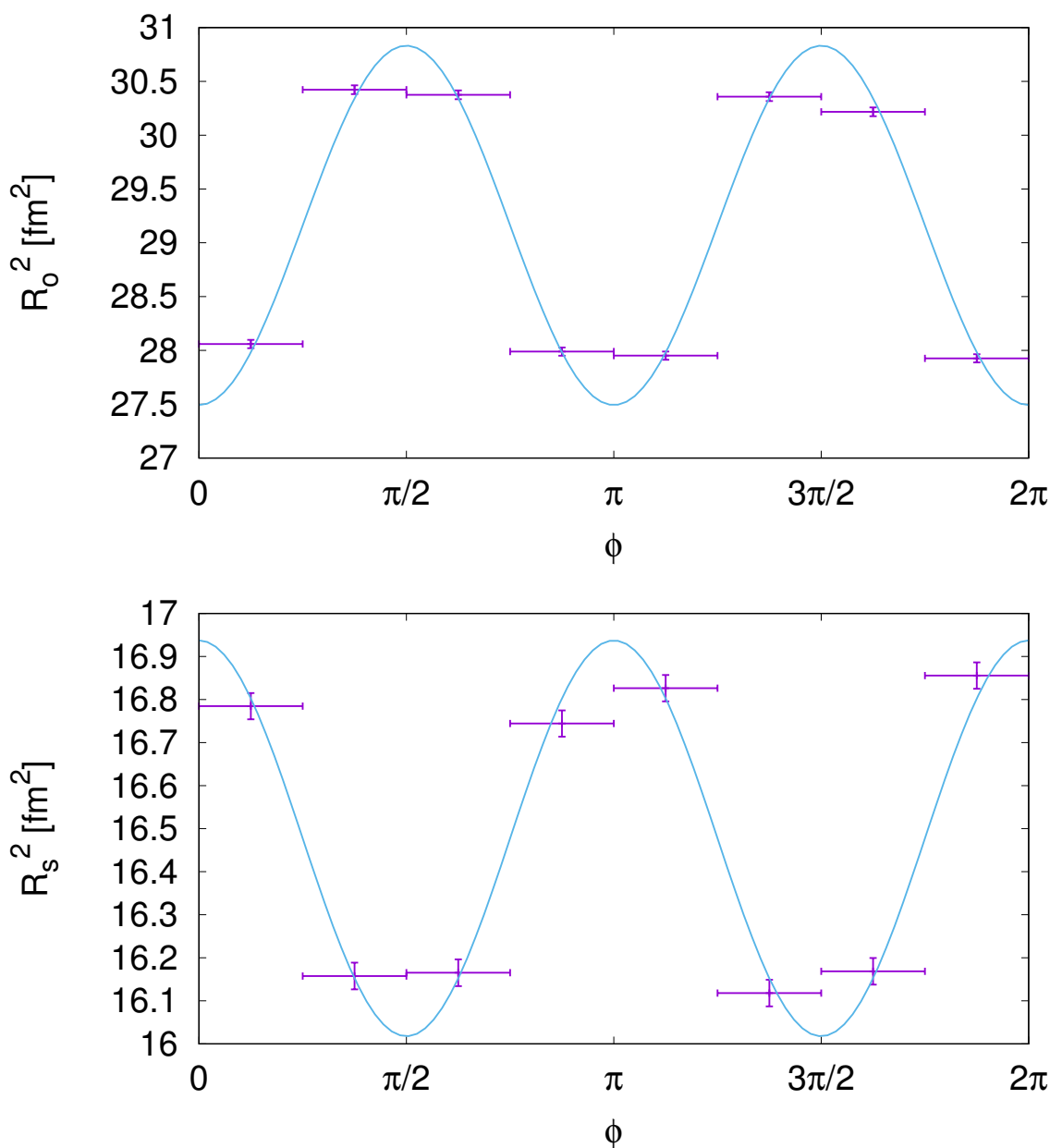
Na týchto obrázkoch si môžeme všimnúť hneď niekoľkých vecí. V prvom rade si môžeme všimnúť, že neistoty fitu sú pre *DRAGON* väčšie ako pre ostatné vzorky, čo môže byť spôsobené tým, že korelačná funkcia pre *DRAGON* nemá až taký dobrý gaussovský tvar, aby sa dala dobre nafitovať. To odpovedá tomu, že Lévyho parameter α je pre túto vzorku relatívne ďaleko od hodnoty 2.

Ďalej na grafoch vidíme, že *DRAGON* a *URQMD* majú korelačné polomery v protifáze, zatiaľ čo obe *AMPT* vzorky majú korelačné polomery vo fáze. To znamená, že každý z modelov predpokladá iné správanie pre oblasť homogenity.

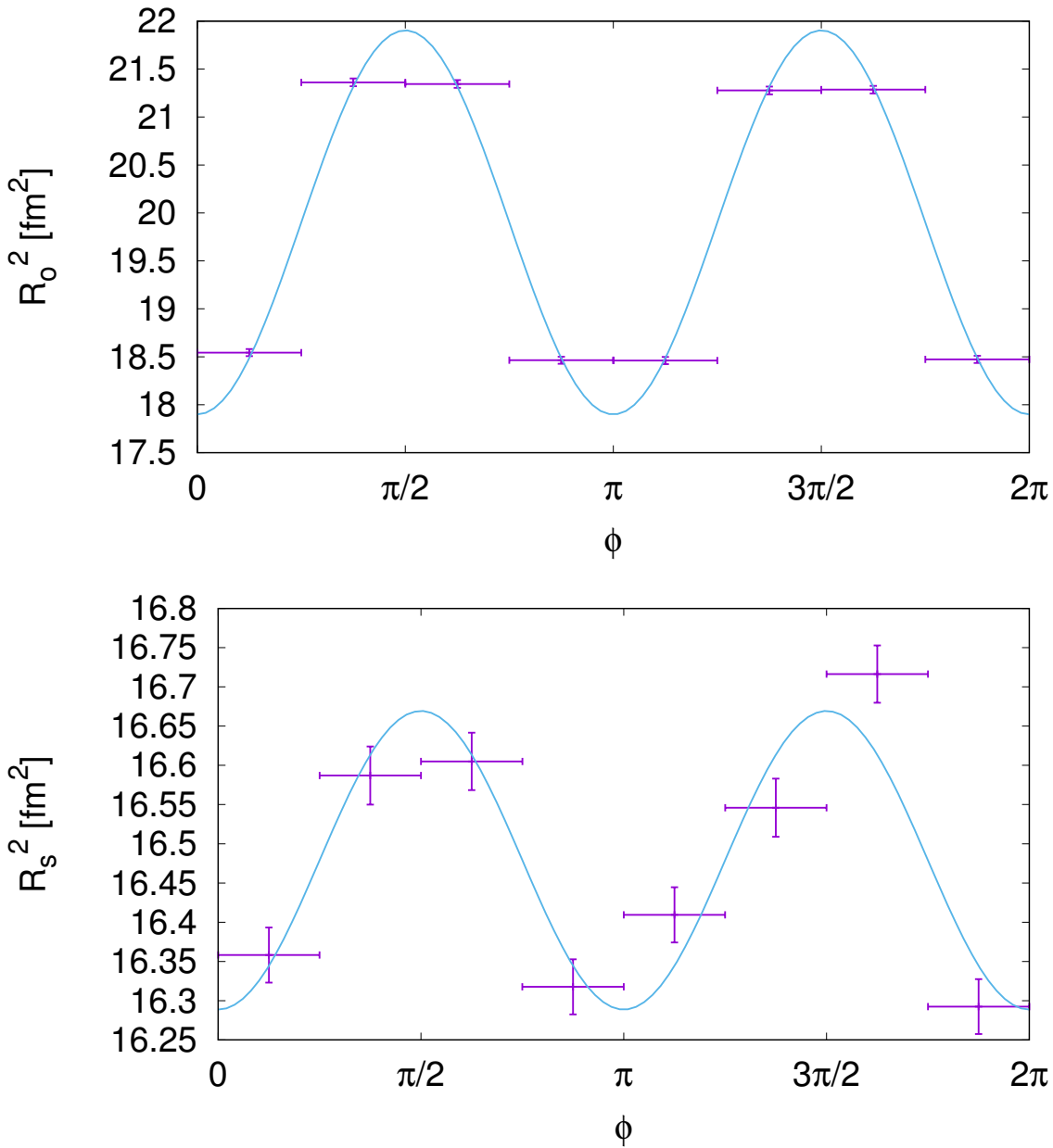
Poslednou zaujímavosťou na týchto grafoch je fakt, že je experimentálne pozorované, že $R_o > R_s$. S tým súhlasia vzorky *AMPT* a *URQMD*, no pre *DRAGON* je $R_o < R_s$. To je spôsobené tým, že sme pri výpočte korelačnej funkcie nebrali do úvahy žiaden filter na priečnu hybnosť. Vypočítali sme si preto korelačné polomery pre rôznu priečnu hybnosť a ich vzájomný pomer sme vykreslili na graf ako funkciu priečnej hybnosti. Tento graf je znázornený na obrázku 4.6. Na tomto grafe vidíme, že v oblasti $0-300\text{MeV}$ platí $R_o > R_s$ ako by sme očakávali, ale pre vyššie priečne hybnosti sa táto nerovnosť otáča. Presumovaním cez častice so všetkými priečnymi hybnosťami preto dostávame vo výsledku $R_o < R_s$.



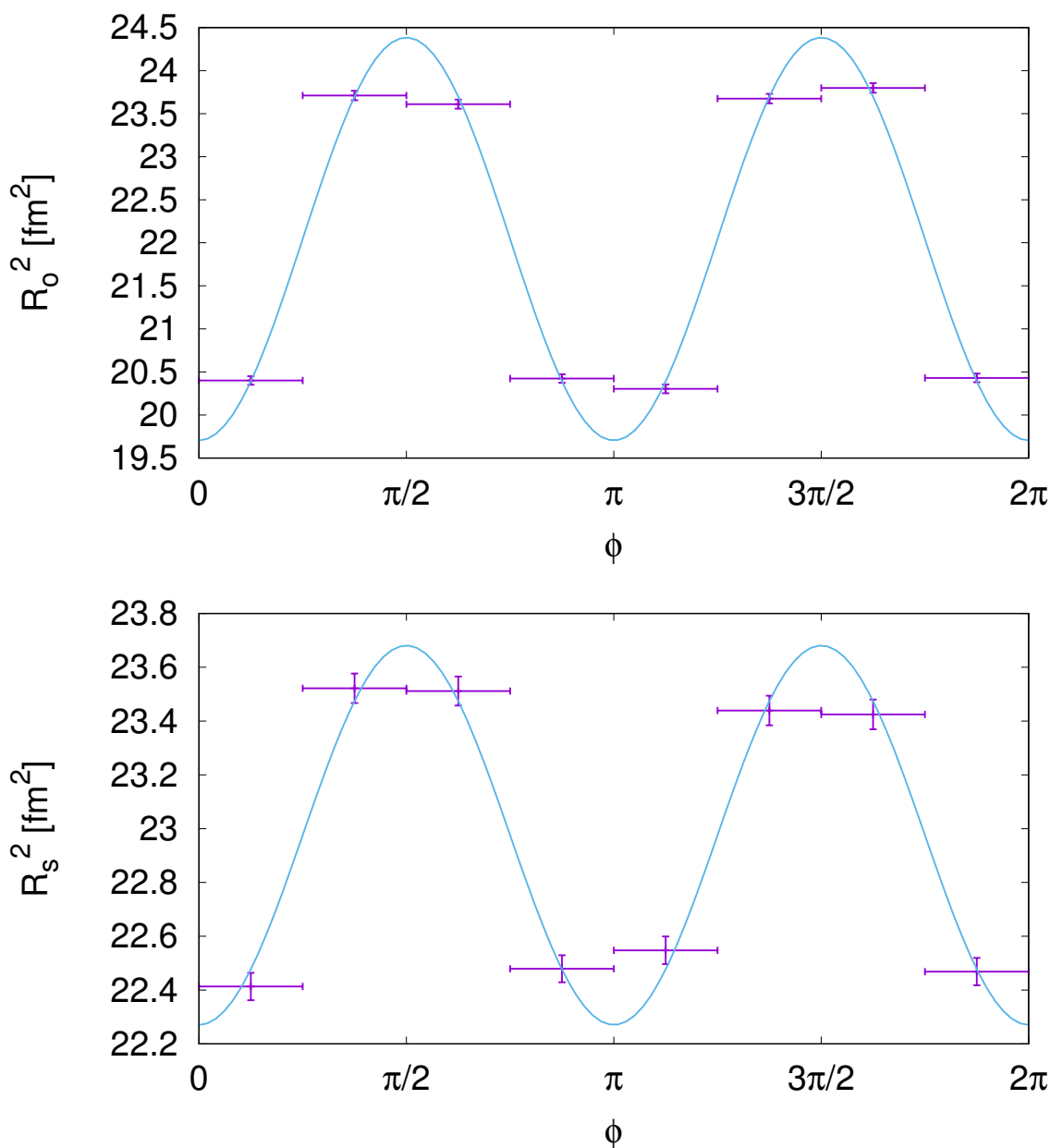
Obr. 4.2: Azimutálna závislosť korelačných polomerov pre 150 000 udalostí vygenerovaných programom DRAGON. Na hornom grafe je azimutálna závislosť pre R_o^2 , na dolnom pre R_s^2 . Neistota v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu. Modrou čiarou je znázornený fit tohoto grafu funkciou $f(x) = a + b \cos(2x)$. Udalosti boli simulované s anizotropiami v rozmedzí -0,1 až 0,1 pre druhý rád a -0,03 až 0,03 pre tretí rád. Korelačné funkcie boli v tomto prípade generované bez obmedzenia na priechu hybnosť.



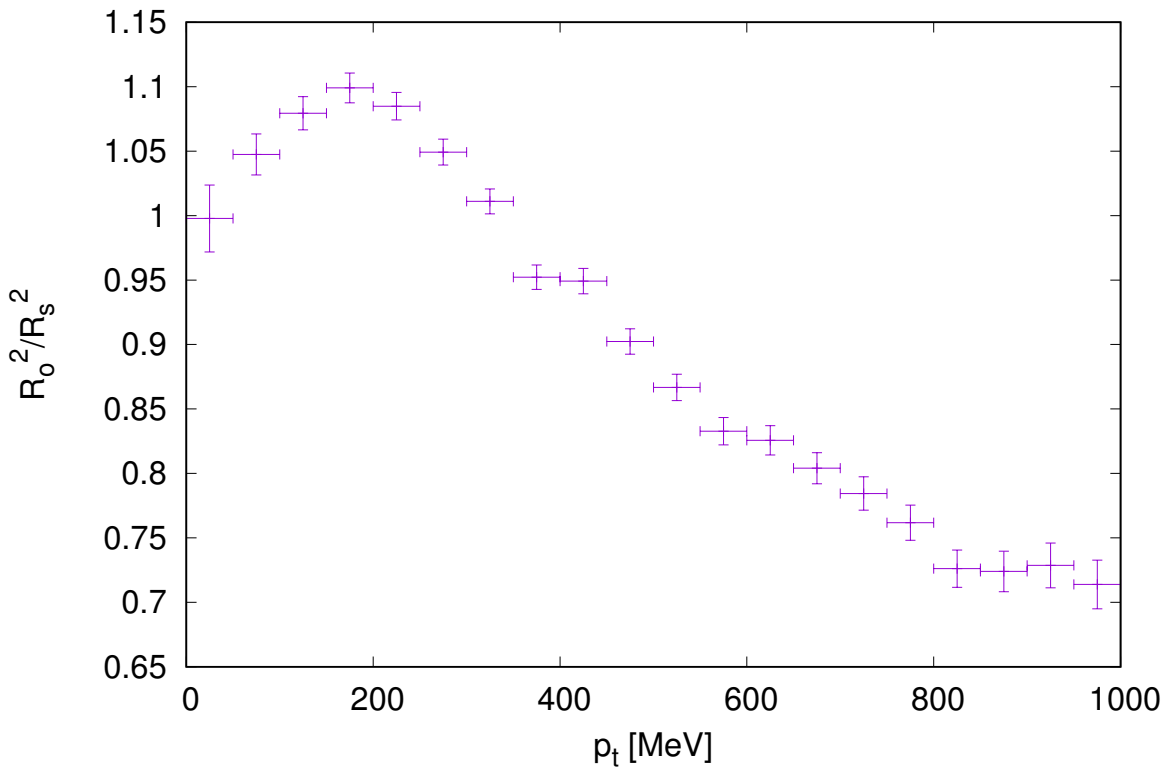
Obr. 4.3: Azimutálna závislosť korelačných polomerov pre 100 000 udalostí vygenerovaných programom UrQMD. Na hornom grafe je azimutálna závislosť pre R_o^2 , na dolnom pre R_s^2 . Neistota v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu. Modrou čiarou je znázornený fit tohoto grafu funkciou $f(x) = a + b \cos(2x)$. Parametre simulovaných zrážok boli $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$, $b_{min} = 7 \text{ fm}$ a $b_{max} = 10 \text{ fm}$, zrážaným materiálom bolo zlato. Korelačné funkcie boli v tomto prípade generované bez obmedzenia na priečnu hybnosť.



Obr. 4.4: Azimutálna závislosť korelačných polomerov pre 10 000 udalostí vygenerovaných programom AMPT. Na hornom grafe je azimutálna závislosť pre R_o^2 , na dolnom pre R_s^2 . Neistota v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu. Modrou čiarou je znázornený fit tohoto grafu funkciou $f(x) = a + b \cos(2x)$. Parametre simulovaných zrážok boli $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$, $b_{min} = 7 \text{ fm}$ a $b_{max} = 10 \text{ fm}$, zrážaným materiálom bolo zlato. Korelačné funkcie boli v tomto prípade generované bez obmedzenia na priečnu hybnosť.



Obr. 4.5: Azimutálna závislosť korelačných polomerov pre 10 000 udalostí vygenerovaných programom AMPT. Na hornom grafe je azimutálna závislosť pre R_o^2 , na dolnom pre R_s^2 . Neistota v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu. Modrou čiarou je znázornený fit tohoto grafu funkciou $f(x) = a + b \cos(2x)$. Parametre simulovaných zrážok boli $\sqrt{s_{NN}} = 2760$ GeV, $b_{min} = 7$ fm a $b_{max} = 10$ fm, zrážaným materiálom bolo olovo. Korelačné funkcie boli v tomto prípade generované bez obmedzenia na priečnu hybnosť.



Obr. 4.6: Závislosť pomeru korelačných polomerov R_o^2/R_s^2 od priečnej hybnosti p_t . V programe DRAGON sme vygenerovali 50 000 udalostí s anizotropiami $-0,1$ až $0,1$ pre druhý rád a $-0,03$ až $0,03$ pre tretí rád a následne sme pre rôzne priečne hybnosti vypočítali korelačnú funkciu pomocou programu CRAB. Neistota v x -ovom smere odpovedá šírke hybnostného koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu.

Kapitola 5

Triedenie udalostí podľa tvaru

V experimentoch sa kvôli lepšej štatistike vždy sumuje cez množstvo zrážok. Takýmto sumovaním však strácame prehľad o anizotropiách, pretože tie sa vo veľkom množstve udalostí vyrušia z dôvodu symetrie.

Prvý krok, ktorý sme preto spravili, bol, že sme všetky udalosti otočili tak, aby ich vektor \vec{q}_2 smeroval pozdĺž osi x . Takýmto spôsobom sme docielili, že pri presumovaní cez všetky udalosti anizotropia druhého rádu interferuje, zatiaľ čo vyššie anizotropie sa navzájom vyrušia. To však môžeme rovnako urobiť aj pre vyššie rády. Mohli by sme teda napríklad všetky udalosti otočiť tak, aby vektor \vec{q}_3 smeroval pozdĺž osi x . V takom prípade by mal výsledok nasčítanú anizotropiu tretieho rádu, no ostatné anizotropie by sme tam hľadali márne. Rovnako by to fungovalo aj pre vyššie anizotropie. My sme však zvolili práve \vec{q}_2 , pretože táto anizotropia je najsilnejšia.

Spôsob, akým v experimente môžeme sledovať anizotropiu niektorého rádu, už existuje. Naším cieľom však je ukázať spôsob, akým možno pozorovať anizotropie druhého a aj tretieho rádu súčasne. K tomu využijeme triedenie udalostí podľa tvaru.

Tvar udalosti je charakterizovaný spektrom, ktoré možno rozložiť do Fourierovho radu popísaného vzťahom (1.12). Jeho anizotropie sú popísané koeficientami v_n , podľa ktorých možno udalosti zoraďovať. Ďalším spôsobom, akým od seba možno dve udalosti odlíšiť, je pomocou vektoru \vec{q}_n , ktorý sme si definovali vzťahom (4.3).

Jednou z prvých techník, ktorá sa zaoberala hľadaním podobností v tvaroch udalostí, je inžinierstvo tvaru udalostí (angl. Event Shape Engineering) [27]. Aktuálnejšou technikou, ktorou sa zaoberáme v tejto práci, je triedenie udalostí podľa tvaru (angl. Event Shape Sorting) [28], ktorá zahŕňa viac ako len triedenie podľa \vec{q}_n .

Na základe tejto techniky vznikol program ESSTER [28], ktorého algoritmus sme na triedenie udalostí podľa tvaru použili. Samotný program sme však použiť nemohli, pretože nedokázal spracovať tak veľké vzorky, aké máme vygenerované. Vytvorili sme preto nový program využívajú rovnaký algoritmus a upravený tak, aby dokázal spracovávať aj stovky tisíc udalostí.

5.1 Algoritmus

Program začína tým, že rozdelí častice v každej udalosti do k uhlových košov. Číslo aktuálneho koša budeme označovať i . V našom prípade sme používali $k = 20$.

Následne sa spraví počítačové zoradenie. Ako vhodnú veličinu sme určili $|\vec{q}_2|$. Zoradili sme všetky udalosti podľa tejto veličiny zostupne. Triedenie udalostí podľa tvaru je iteratívny proces, a preto je algoritmus schopný zotriediť udalosti, aj keby sme ich nechali v náhodnom poradí. To znamená, že počítačové zoradenie neovplyvňuje výsledok triedenia.

Všetky udalosti teraz roztriedime do ω tried. Aby sme vedeli rozlíšiť triedu udalostí a uhlový kôš, použijeme v tomto prípade značenie gréckymi písmenami a aktuálnu triedu udalostí tak budeme označovať μ .

Ešte si označíme M celkový počet udalostí¹, j číslo aktuálnej udalosti, N_j počet častíc v j -tej udalosti, $\epsilon = \frac{M}{\omega}$ počet udalostí v jednej triede.

Samotný algoritmus triedenia začína tým, že vypočítame pravdepodobnosť toho, že udalosť v triede μ má rozdelenie častíc $\{n_i\}_j$, čo môžeme zapísať ako $P(\{n_i\}_j | \mu)$. Túto pravdepodobnosť môžeme vypočítať pomocou pravdepodobnosti, že častica v i -tom koši patrí do triedy μ . To možno zapísať do vzťahu

$$P(\{n_i\}_j | \mu) = N_j! \prod_{i=1}^k \frac{P(i|\mu)^{(n_i)_j}}{(n_i)_j!}. \quad (5.1)$$

$P(i|\mu)$ udáva pravdepodobnosť toho, že v triede μ máme časticu v i -tom uhlovom koši, čo môžeme vypočítať ako pomer počtu častíc v i -tom koši a celkového počtu častíc danej triedy μ . To môžeme zapísať ako

$$P(i|\mu) = \frac{\sum_{j=\epsilon(\mu-1)}^{\epsilon\mu} (n_i)_j}{\sum_{j=\epsilon(\mu-1)}^{\epsilon\mu} N_j}. \quad (5.2)$$

Nakoniec vypočítame pre nás najpodstatnejšiu pravdepodobnosť, že udalosť s rozdelením častíc $\{n_i\}_j$ patrí do triedy μ . Túto pravdepodobnosť určíme pomocou Bayesovho vzorca pre podmienenú pravdepodobnosť ako

$$P(\mu | \{n_i\}_j) = \frac{P(\{n_i\}_j | \mu)P(\mu)}{P(\{n_i\}_j)} = \frac{P(\{n_i\}_j | \mu)P(\mu)}{\sum_{\mu'=1}^{\omega} P(\{n_i\}_j | \mu')P(\mu')}. \quad (5.3)$$

S využitím vzťahu (5.1) môžeme tento vzťah upraviť do tvaru

$$P(\mu | \{n_i\}_j) = \frac{\prod_{i=1}^k P(i|\mu)^{(n_i)_j} P(\mu)}{\sum_{\mu'=1}^{\omega} \prod_{i=1}^k P(i|\mu')^{(n_i)_j} P(\mu')}. \quad (5.4)$$

Pravdepodobnosť $P(\mu)$ je jednoducho prevrátená hodnota počtu tried, teda $P(\mu) = \frac{1}{\omega}$ a tak dostaneme výsledný vzťah

$$P(\mu | \{n_i\}_j) = \frac{\prod_{i=1}^k P(i|\mu)^{(n_i)_j}}{\sum_{\mu'=1}^{\omega} \prod_{i=1}^k P(i|\mu')^{(n_i)_j}}. \quad (5.5)$$

¹Pre naše vzorky platí $M_{AMPT} = 10\,000$, $M_{DRAGON} = 150\,000$ a $M_{URQMD} = 100\,000$.

V tomto momente tak máme pre každú udalosť vypočítanú pravdepodobnosť, že patrí do μ -tej triedy. Je preto zrejmé, že musí platiť

$$\sum_{\mu=1}^{\omega} P(\mu | \{n_i\}_j) = 1, \quad (5.6)$$

inak povedané, pravdepodobnosť, že udalosť patrí do nejakej triedy je 1. Máme teda nejaké diskkrétne rozdelenie toho, do ktorej triedy udalosť patrí. Z takéhoto rozdelenia si tak môžeme vypočítať *stredné číslo triedy*

$$\bar{\mu} = \sum_{\mu=1}^{\omega} \mu P(\mu | \{n_i\}_j). \quad (5.7)$$

Posledným krokom algoritmu je zoradiť všetky udalosti podľa $\bar{\mu}$. To nám však spôsobí, že sa zmení obsah jednotlivých tried a tým pádom sa zmení aj priemerný tvar triedy. Môžeme tak odznova určiť pravdepodobnosti $P(\mu | \{n_i\}_j)$ a tiež stredné číslo triedy pre každú udalosť a opäť podľa neho udalosti zoradiť. Tento proces môžeme opakovať ľubovoľne veľa krát. Algoritmus sa zastaví v momente, kedy sa v priebehu jedného cyklu nezmení poradie udalostí, to znamená, že všetky udalosti zostanú na svojom mieste. Táto podmienka je rovnako silná ako podmienka, že nám stačí aby sa nezmenil obsah tried. V momente, kedy sa nezmení obsah tried, sa nezmení ani priemerný tvar triedy a všetky pravdepodobnosti tak ostanú rovnaké a preto sa nezmení ani poradie udalostí.

Celý algoritmus teda vyzerá nasledovne:

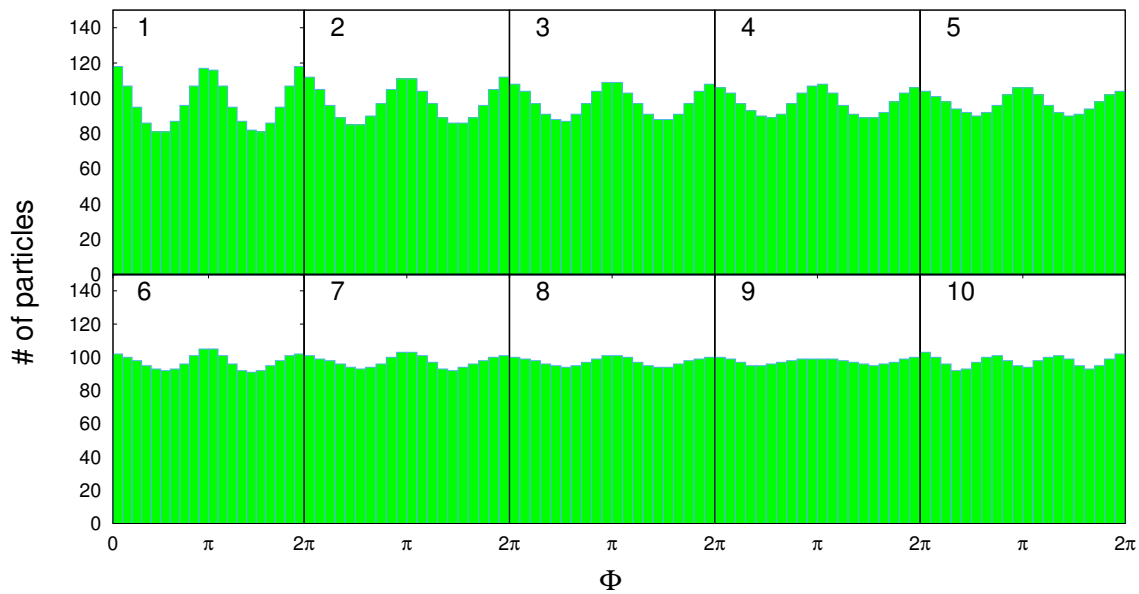
1. v každej udalosti rozdelíme častice do k uhlových košov.
2. Počiatočné zoradenie - zoradíme udalosti zostupne podľa $|\vec{q}_2|$ (nepovinné)
3. Pre každý uhlový kôš v každej triede vypočítame $P(i|\mu)$ podľa vzťahu (5.2).
4. Pre každú udalosť určíme pravdepodobnosť $P(\mu | \{n_i\}_j)$, že patrí do triedy μ , podľa vzťahu (5.5).
5. Pre každú udalosť vypočítame stredné číslo triedy $\bar{\mu}$ podľa vzťahu (5.7).
6. Zoradíme udalosti vzostupne podľa $\bar{\mu}$.
7. Proces opakujeme od tretieho kroku, dokým poradie udalostí nebude ustálené.

5.2 Výsledky triedenia

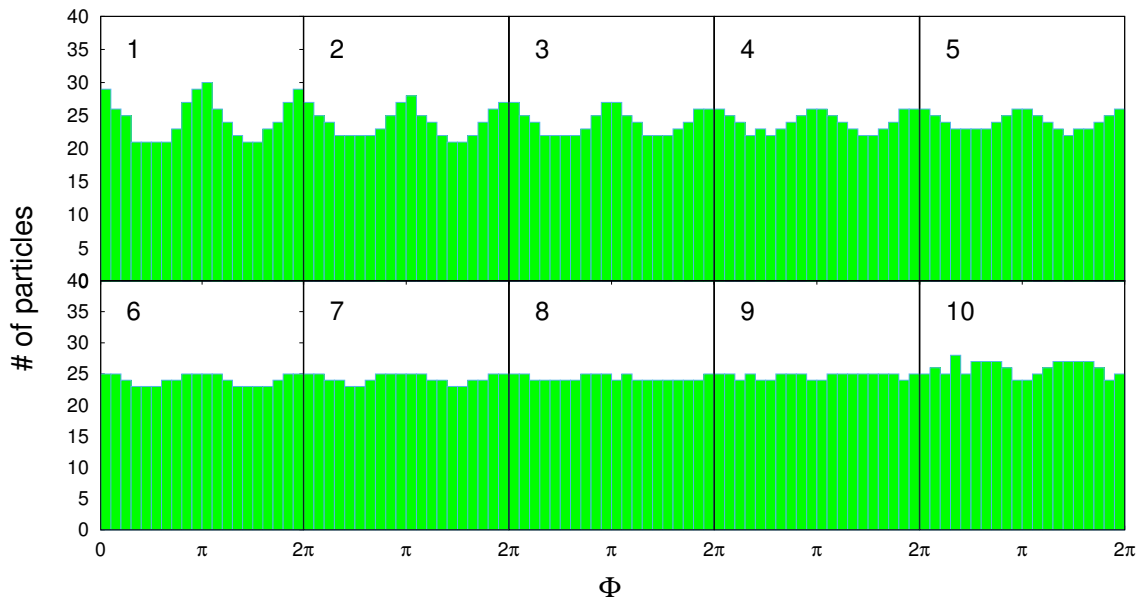
Ešte pred samotným zoradením sme na všetky vzorky vytvorili filter, ktorý nám vybral iba nabité častice s rapiditou $|Y| < 1$. Do úvahy sme brali iba nabité častice

kvôli tomu, že iba tie meriame. Filter na rapiditu sme zvolili kvôli tomu, že naše generátory generovali častice s rôznymi hranicami rapidity a takýmto spôsobom sme ich výstupy zjednotili. Navyše tak nebudeme brať do úvahy častice, ktoré sú emitované viac v pozdĺžnom smere ako v priečnom a neovplyvňujú tvar udalosti.

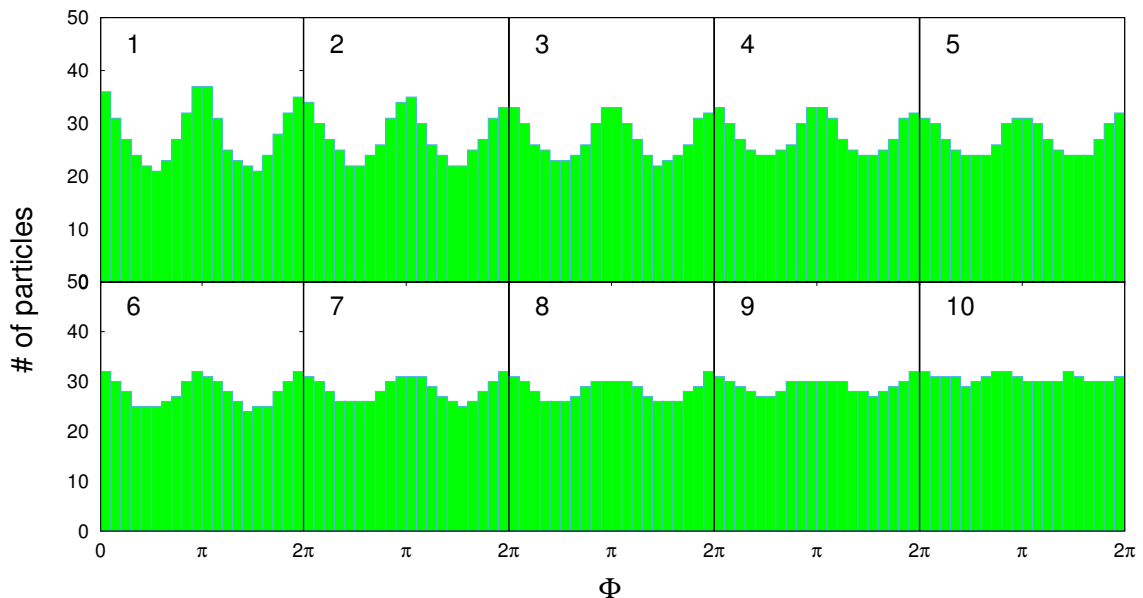
Následne sme na jednotlivé vzorky aplikovali algoritmus opísaný v predchádzajúcej sekcii. Výsledkom tohto algoritmu je poradie zoradených udalostí a ich roztriedenie do jednotlivých tried rozdelenia v azimutálnom uhle. Prvá vec, ktorá nás v tomto momente zaujíma, je priemerný tvar v triedach. Ten je znázornený pre jednotlivé vzorky na obrázkoch 5.1-5.4. Na týchto obrázkoch môžeme pozorovať výsledok triedenia udalostí. Vidíme, že vo všetkých prípadoch je dominantné triedenie podľa veľkosti anizotropie druhého rádu. V prvých triedach vidíme veľmi silné anizotropie druhého rádu. Naopak v posledných triedach je už anizotropia druhého rádu dosť potlačená a začína sa prejavovať anizotropia tretieho rádu, prípadne sa stanú tieto dve anizotropie porovnateľné a v posledných triedach vidíme ich superpozíciu.



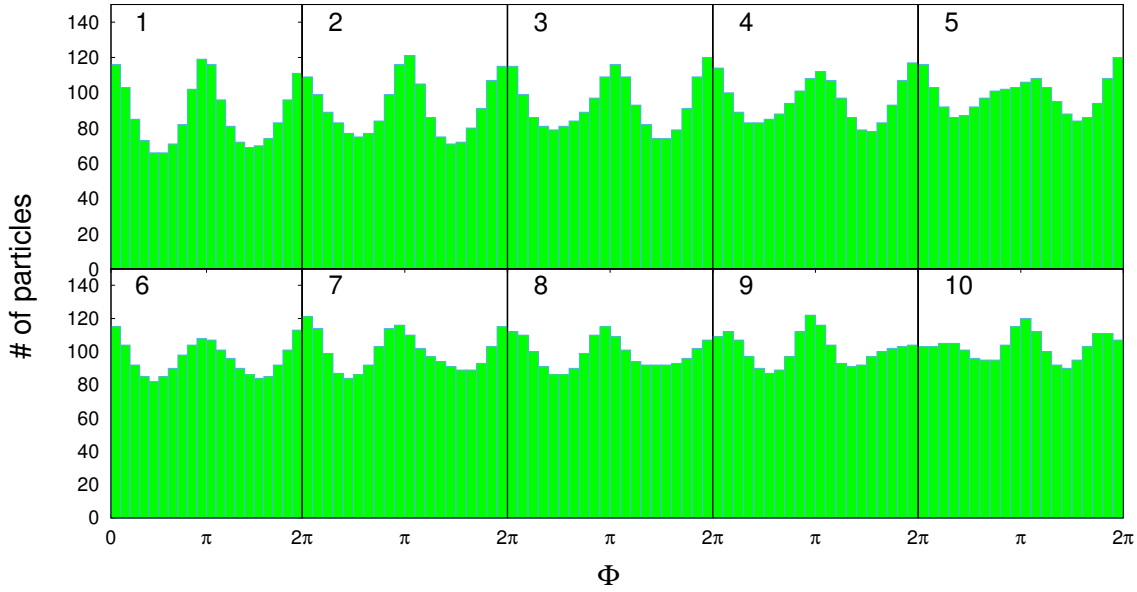
Obr. 5.1: Priemerné uhlové histogramy pre jednotlivé triedy po zotriedení udalostí podľa tvaru. Jedná sa o vzorku 150 000 udalostí vygenerovaných programom DRAGON. Udalosti boli simulované s anizotropiami v rozmedzí $-0,1$ až $0,1$ pre druhý rád a $-0,03$ až $0,03$ pre tretí rád. V histogramoch sú zahrnuté iba nabité častice s $|Y| < 1$.



Obr. 5.2: Priemerné uhlové histogramy pre jednotlivé triedy po zotriedení udalostí podľa tvaru. Jedná sa o vzorku 100 000 udalostí vygenerovaných programom UrQMD. Parametre simulovaných zrážok boli $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, $b_{min} = 7$ fm a $b_{max} = 10$ fm, zrážaným nuklidom bolo zlato 197. V histogramoch sú zahrnuté iba nabitú častice s $|Y| < 1$.



Obr. 5.3: Priemerné uhlové histogramy pre jednotlivé triedy po zotriedení udalostí podľa tvaru. Jedná sa o vzorku 10 000 udalostí vygenerovaných programom AMPT. Parametre simulovaných zrážok boli $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV, $b_{min} = 7$ fm a $b_{max} = 10$ fm, zrážaným nuklidom bolo zlato 197. V histogramoch sú zahrnuté iba nabitú častice s $|Y| < 1$.



Obr. 5.4: Priemerné uhlové histogramy pre jednotlivé triedy po zotriedení udalostí podľa tvaru. Jedná sa o vzorku 10 000 udalostí vygenerovaných programom AMPT. Parametre simulovaných zrážok boli $\sqrt{s_{NN}} = 2760$ GeV, $b_{min} = 7$ fm a $b_{max} = 10$ fm, zrážaným nuklidom bolo olovo 208. V histogramoch sú zahrnuté iba nabitú častice s $|Y| < 1$.

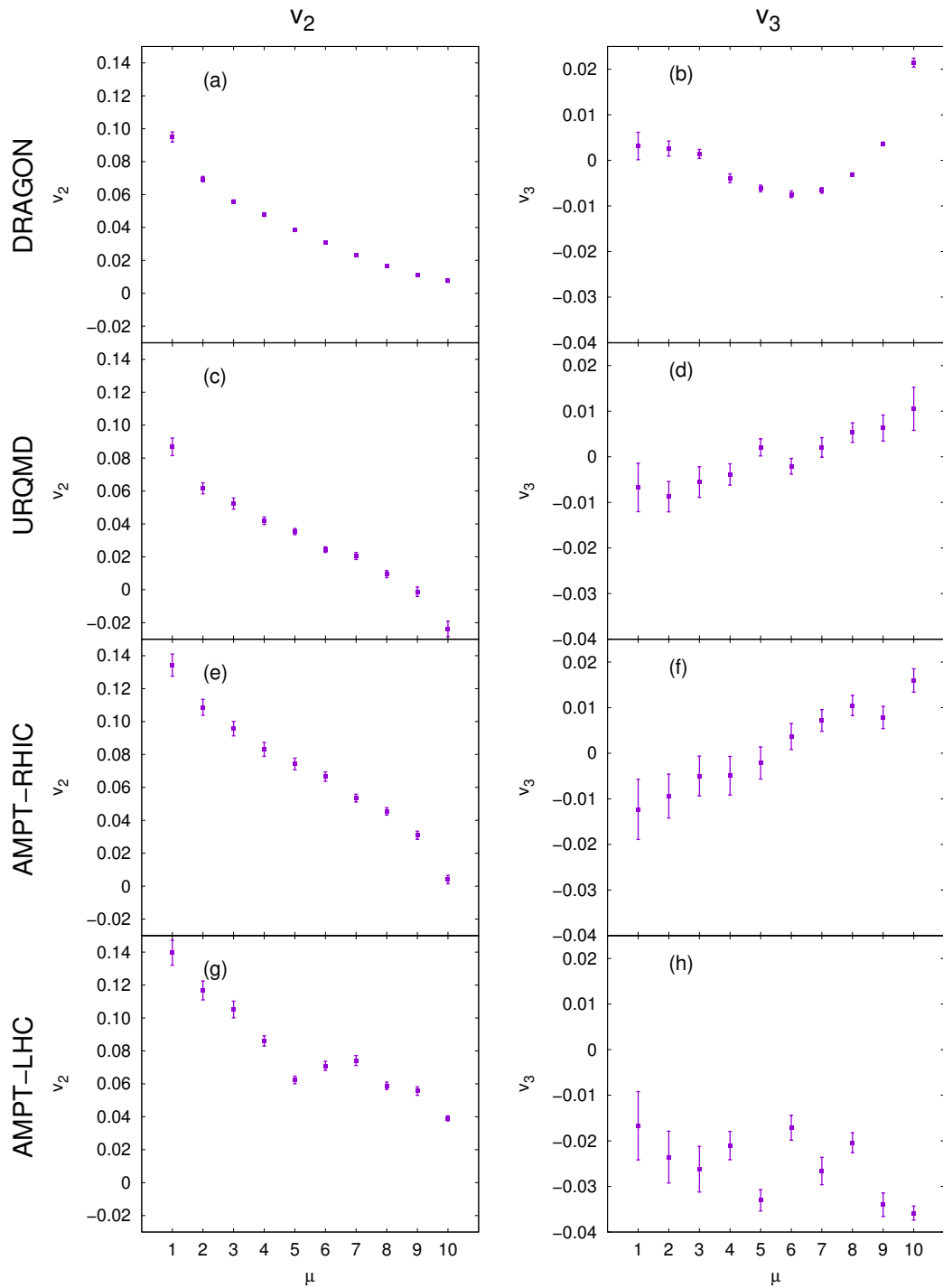
Aby sme neopisovali obrázky iba podľa oka, bude lepšie, keď určíme koeficienty v_2 a v_3 , ktoré tvar udalosti a jeho anizotropie opisujú. Priemerné tvaru udalostí preto nafitujeme funkciou

$$f(x) = v_0 (1 + 2v_2 \cos(2x) + 2v_3 \cos(3(x - \theta_3))). \quad (5.8)$$

Tu ešte treba podotknúť, že máme dve možnosti na obmedzenie parametrov. Prvou možnosťou je obmedziť sa na kladné v_3 , čo by znamenalo, že uhol θ_3 by nadobúdala hodnoty z intervalu $\langle 0; \frac{2\pi}{3} \rangle$. V takom prípade by sme zmenu tvaru z kladného v_3 na záporné (alebo naopak) videli skokovou zmenou uhla θ_3 . To ale nechceme. Aby sme lepšie videli, ako sa mení tvar anizotropie tretieho rádu, budeme uvažovať v_3 ľubovoľné, ale zato obmedzíme uhol θ_3 na interval $\langle -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \rangle$. Zmenu fázy tak nedostaneme zmenou uhla, ale zmenou znamienka pri v_3 .

Pre každú vzorku tak dostaneme závislosť koeficientov v_2 a v_3 priemernej udalosti od čísla triedy μ . Tieto závislosti sú pre všetky vzorky znázornené na obrázku 5.5.

Na týchto grafoch môžeme vidieť, že v anizotropii druhého rádu sa všetky vzorky správajú veľmi podobne. Z maximálnej hodnoty v_2 v prvej triede sa postupne dostaneme na minimálnu hodnotu v poslednej triede. Môžeme si všimnúť, že v niektorých vzorkách je táto minimálna hodnota dokonca záporná. Ako je to možné, keď sme všetky udalosti otočili tak, aby mali \vec{q}_2 otočené rovnakým smerom? Je to preto, že práve spo-



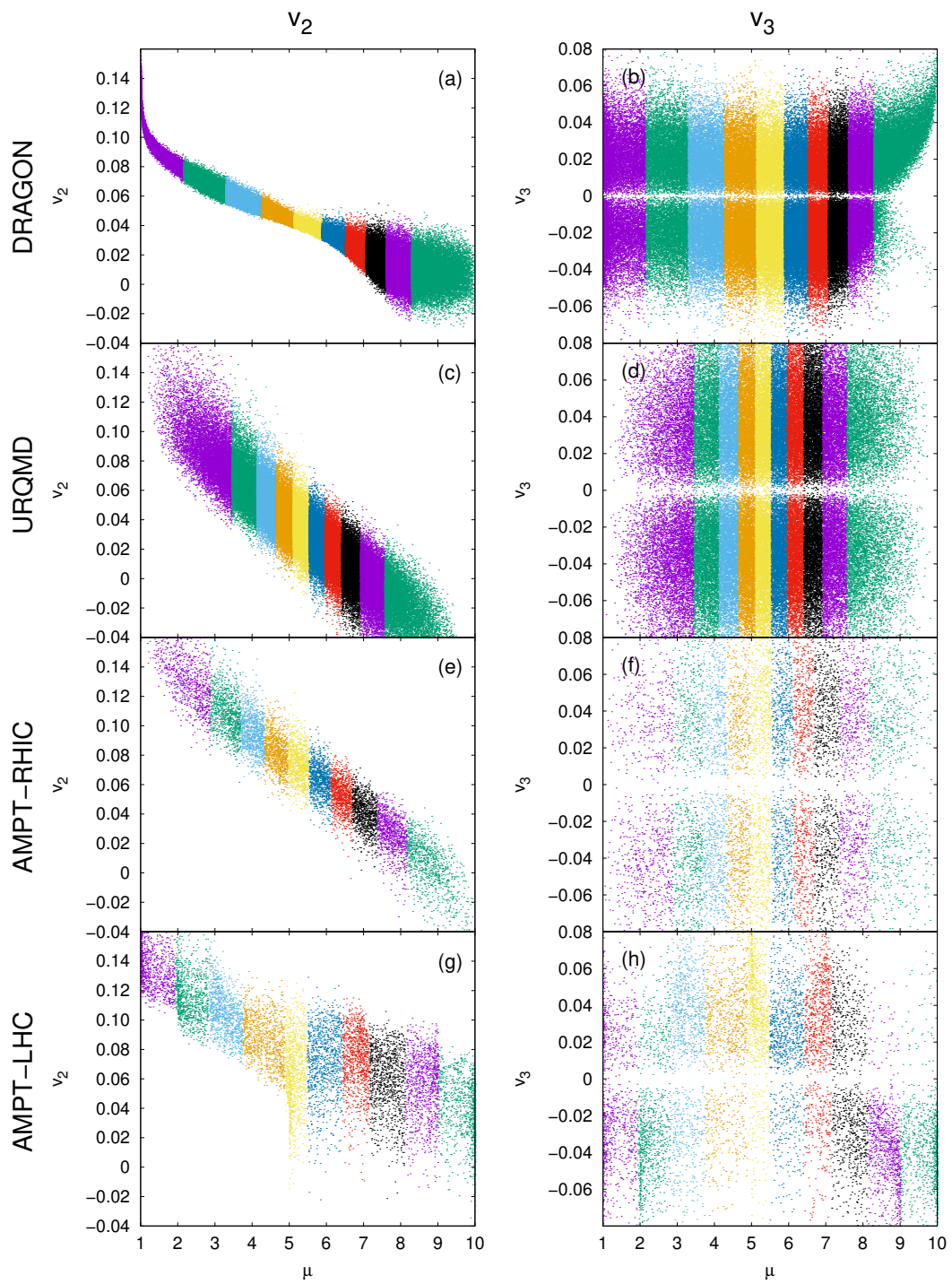
Obr. 5.5: Závislosť koeficientov Fourierovho rozvoja v_2 a v_3 priemernej udalosti od čísla triedy pre všetky štyri vzorky. V ľavom stĺpci je znázornená závislosť koeficientu v_2 , v pravom stĺpci v_3 . V jednotlivých riadkoch sú znázornené výsledky pre jednotlivé vzorky, postupne *DRAGON*, *URQMD*, *AMPT-RHIC* a *AMPT-LHC*.

mínané otáčanie sme robili pre vektor \vec{q}_2 , ktorý sme vypočítali sumovaním cez všetky častice, zatiaľ čo do triedenia častíc sme uvažovali iba nabité častice s $|Y| < 1$. To znamená, že tvary všetkých častíc a odfiltrovaných častíc sa môžu mierne líšiť.

Správanie sa v anizotropii tretieho rádu je už ale odlišné. Vo vzorke *DRAGON* je v_3 v prvých triedach veľmi blízke nule a zanedbateľné oproti v_2 , no v poslednej triede je hodnota tohto koeficientu oveľa vyššia, zatiaľ čo druhý rád je v tej triede takmer úplne potlačený. Vzorky *URQMD* a *AMPT-RHIC* vyzerajú vcelku podobne - hodnota koeficientu v_3 sa postupne mení so zápornej na kladnú približne rovnako veľkú hodnotu. To znamená, že v prostredných triedach je tretí rád zanedbateľne malý, zatiaľ čo v krajných nadobúda väčšie hodnoty. Vzorka *AMPT-LHC* nemení znamienko pri v_3 a navyše tento koeficient dosahuje relatívne vysoké hodnoty oproti ostatným vzorkám. V tomto prípade však koeficient v_2 neklesá k tak nízkym hodnotám, aby bol druhý rád slabší ako tretí.

Keďže máme vypočítané priemerné číslo triedy a vieme určiť aj uhlové rozdelenie častíc pre každú udalosť, dokážeme spočítať aj v_2 a v_3 a vykresliť si závislosť týchto koeficientov od priemerného čísla triedy pre každú jednu udalosť. Dostaneme tak obrázky, ktoré nereprezentujú iba priemernú udalosť, ale každú udalosť. Tieto závislosti sú znázornené na obrázku 5.6.

Tieto obrázky lepšie opisujú rozptyl koeficientov v_2 a v_3 v udalostiach. Opäť sa tu ale ukazuje veľká podobnosť medzi vzorkami *URQMD* a *AMPT-RHIC*. Na nich vidno, že v_2 klesá približne lineárne, zatiaľ čo v_3 sa zdá byť relatívne náhodné. Na vzorke *DRAGON* vidno oveľa sústredenejší pás v prvých triedach závislosti koeficientu v_2 . V posledných triedach je však už tento koeficient viac rozostrený, zato koeficient v_3 sa práve v poslednej triede sústreďuje do relatívne úzkeho pásu a iba ku kladným hodnotám. Vzorka *AMPT-LHC* je zo všetkých najviac rozostrená, ale aj tu vidno na anizotropii tretieho rádu, že v posledných triedach sa hodnoty v_3 držia iba v záporných číslach.



Obr. 5.6: Závislosť koeficientov Fourierovho rozvoja v_2 a v_3 všetkých udalostí od stredného čísla triedy pre všetky štyri vzorky. V ľavom stĺpci je znázornená závislosť koeficientu v_2 , v pravom stĺpci v_3 . V jednotlivých riadkoch sú znázornené výsledky pre jednotlivé vzorky, postupne *DRAGON*, *URQMD*, *AMPT-RHIC* a *AMPT-LHC*.

Kapitola 6

Korelačná femtoskopia podobných udalostí

Udalosti máme zoradené a roztriedené do desiatich tried tak, že v každej triede sú navzájom podobné udalosti. Ako sme mohli vidieť na grafoch koeficientov v_2 a v_3 , už tu je vidno, že sa v jednotlivých triedach prejavuje súčasne druhý aj tretí rád anizotropií.

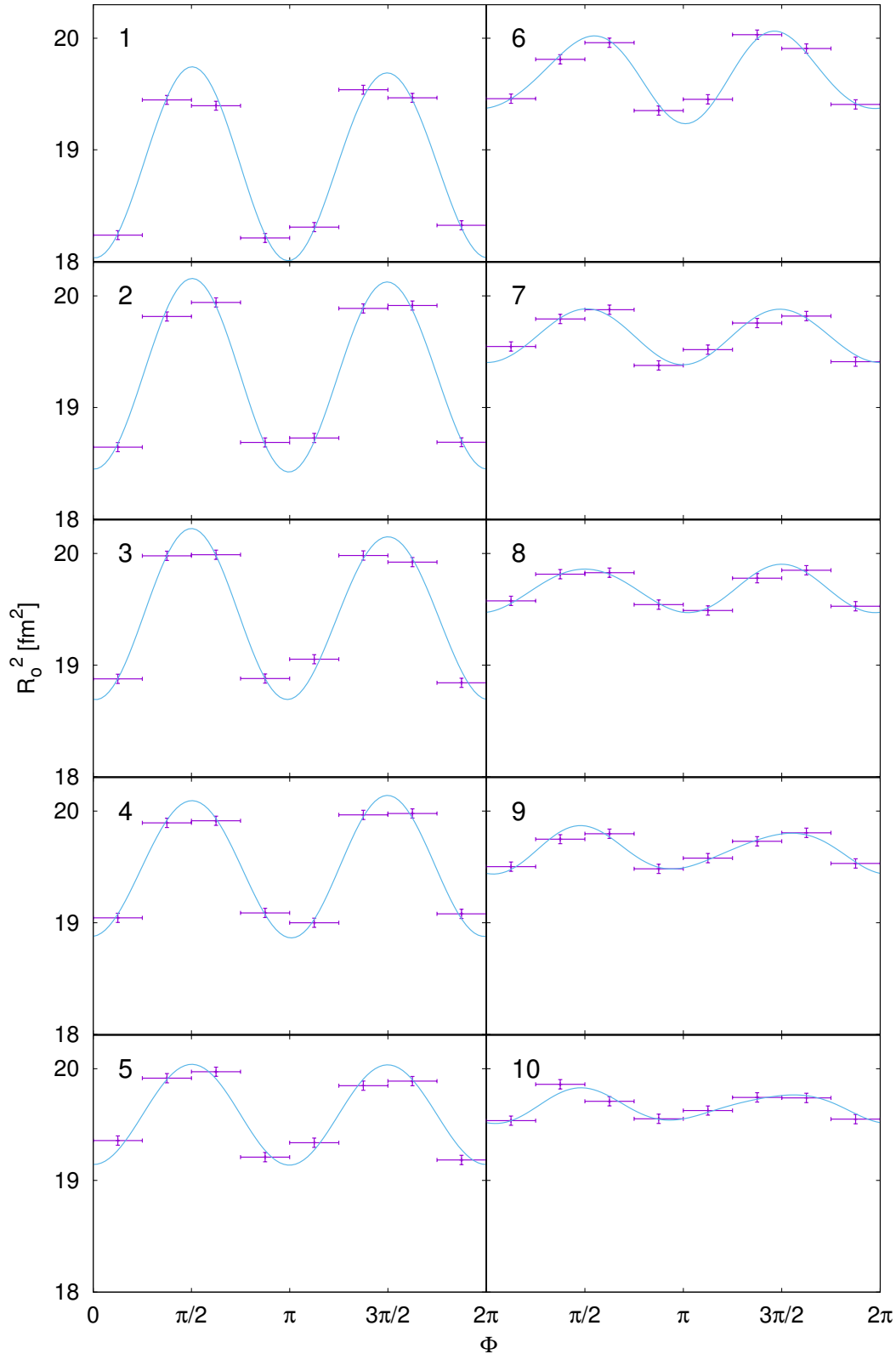
Zostáva nám však ešte určiť korelačné polomery a ich azimutálnu závislosť pre jednotlivé triedy a v nich hľadať anizotropie druhého a tretieho rádu.

6.1 Korelačné polomery v jednotlivých triedach

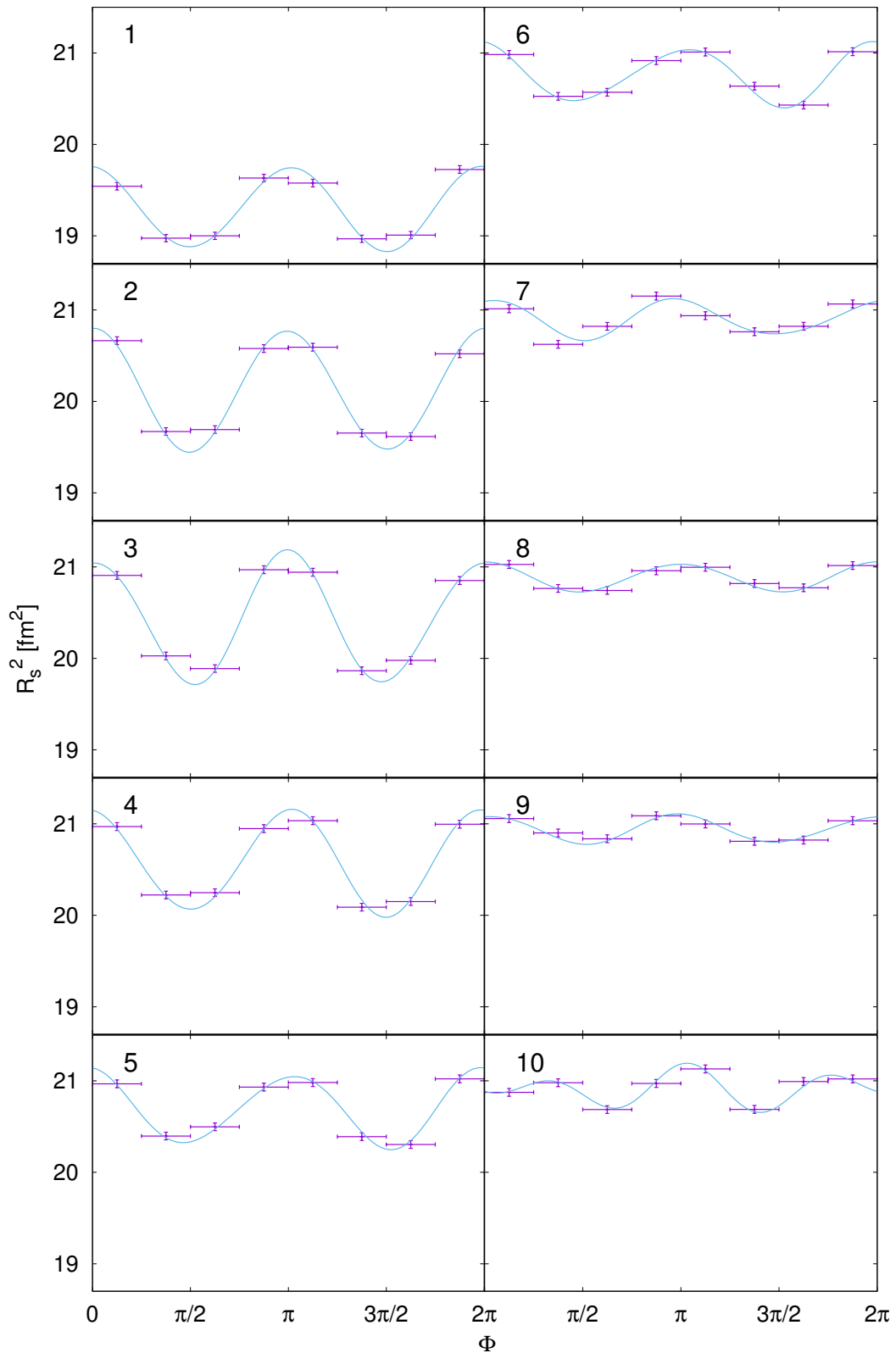
V každej triede sme častice opäť rozdelili do ôsmich uhlových košov a pre každý z nich sme určili korelačnú funkciu pomocou programu CRAB. To nám dáva dokopy 80 výpočtov pre každú vzorku.

Rovnako, ako pri zoraďovaní udalostí, sme tentokrát nastavili program CRAB tak, aby bral do úvahy iba častice s $|Y| < 1$. Navyše, tento program automaticky počíta korelácie iba medzi piónmi. Počet generovaných párov na výpočet korelačnej funkcie sme nechali nastavený na $5 \cdot 10^8$, rovnako ako keď sme určovali korelačnú funkciu nezoradených udalostí. Korelačné polomery sme následne určili naftovaním korelačnej funkcie gaussovskou funkciou podľa vzťahu (4.1).

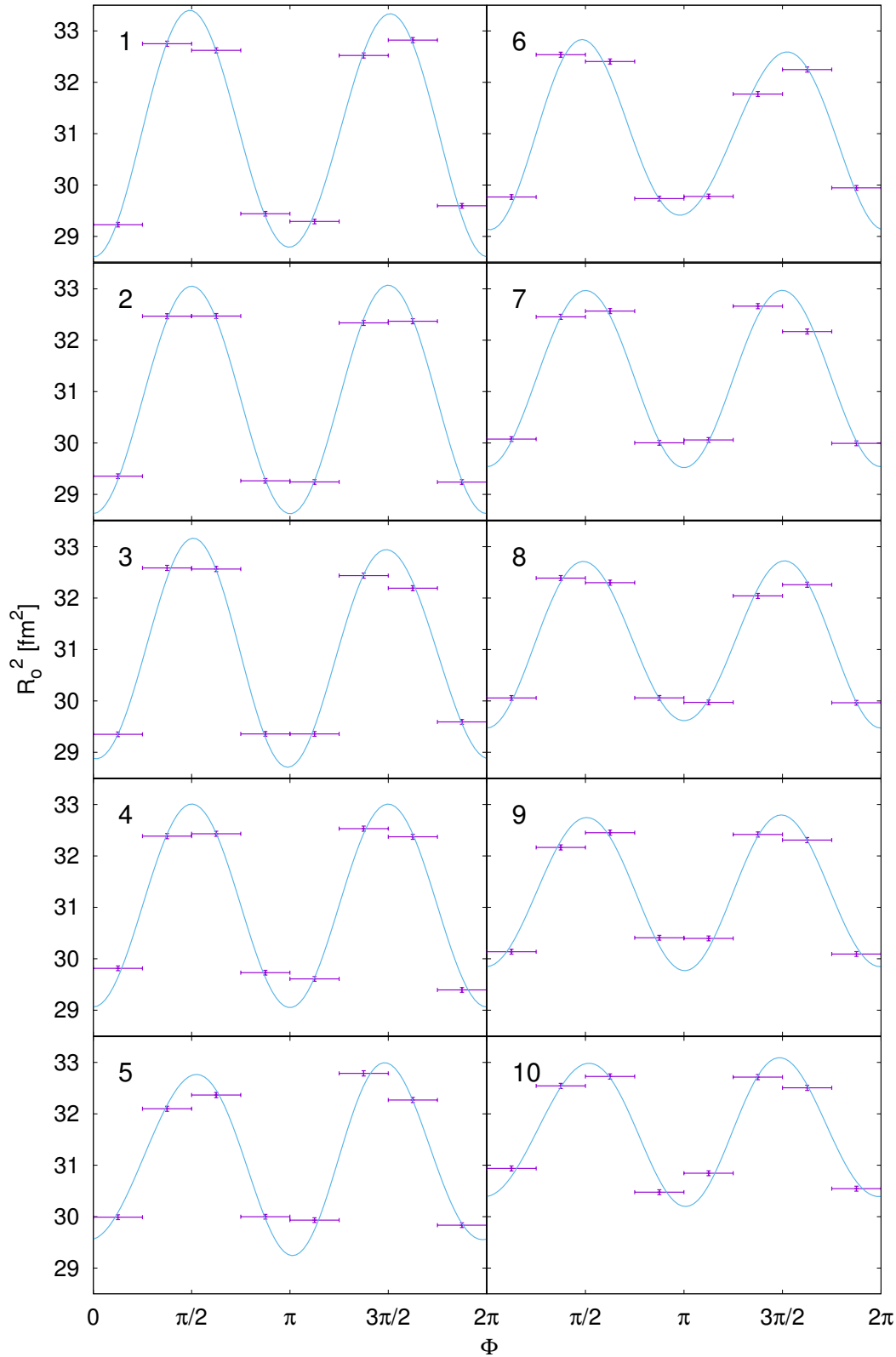
Na obrázkoch 6.1 až 6.8 sú postupne znázornené výsledné azimutálne závislosti korelačných polomerov R_o a R_s pre všetky štyri vzorky. Na týchto grafoch je vidno, že rovnako ako pri skúmaní koeficientov v_2 a v_3 v jednotlivých triedach, aj tu v prvých triedach prevláda silná anizotropia druhého rádu. V posledných triedach sú však anizotropie druhého a tretieho rádu podobne veľké a tak je výsledkom kombinácia týchto rádo, ktorú budeme musieť určiť Fourierovou analýzou.



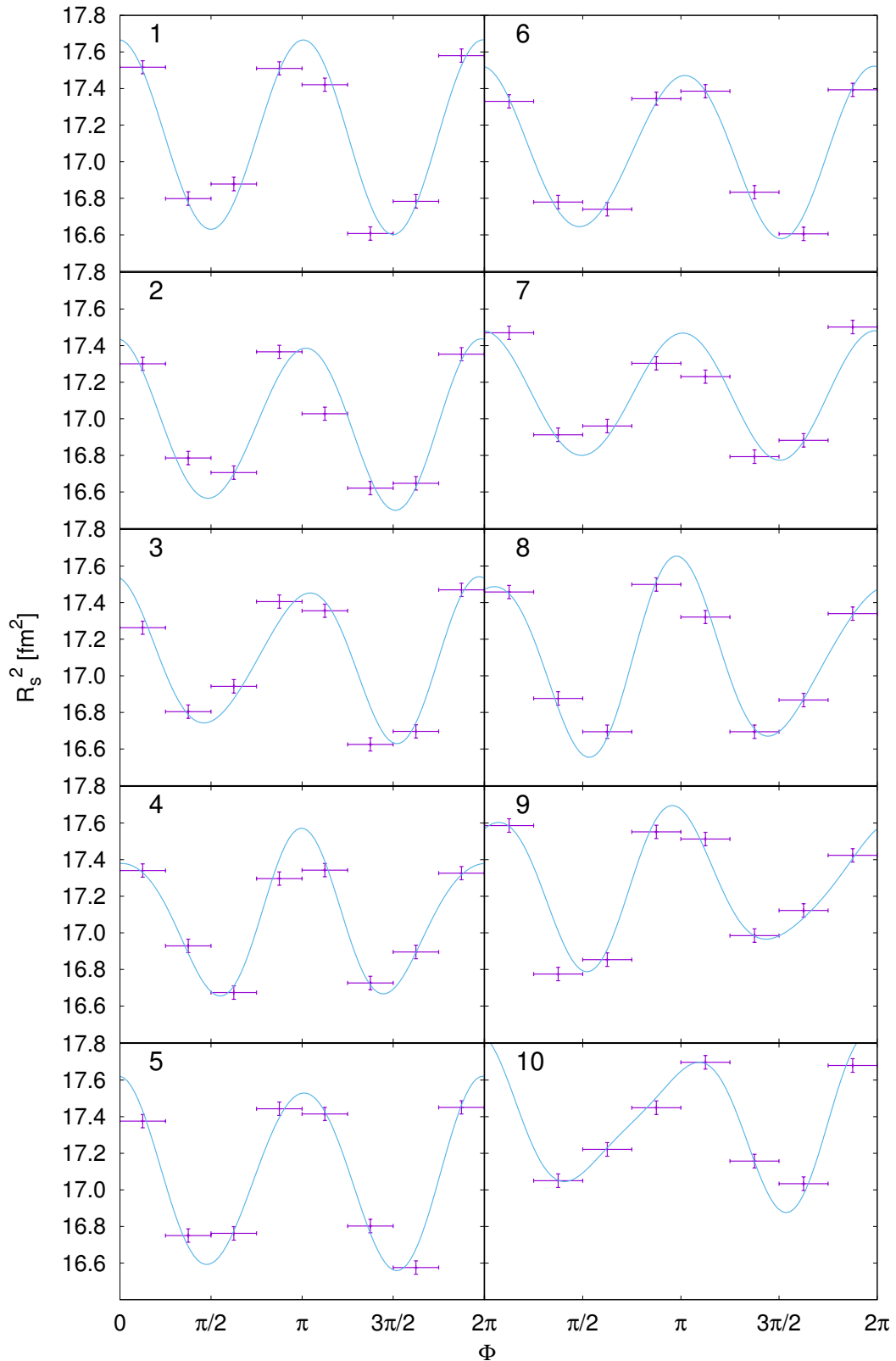
Obr. 6.1: Azimutálna závislosť korelačného polomeru R_o v jednotlivých triedach pre vzorku *DRAGON*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu korelačnej funkcie. Modrou farbou je znázornený fit výsledkov funkciou zo vzťahu (6.1).



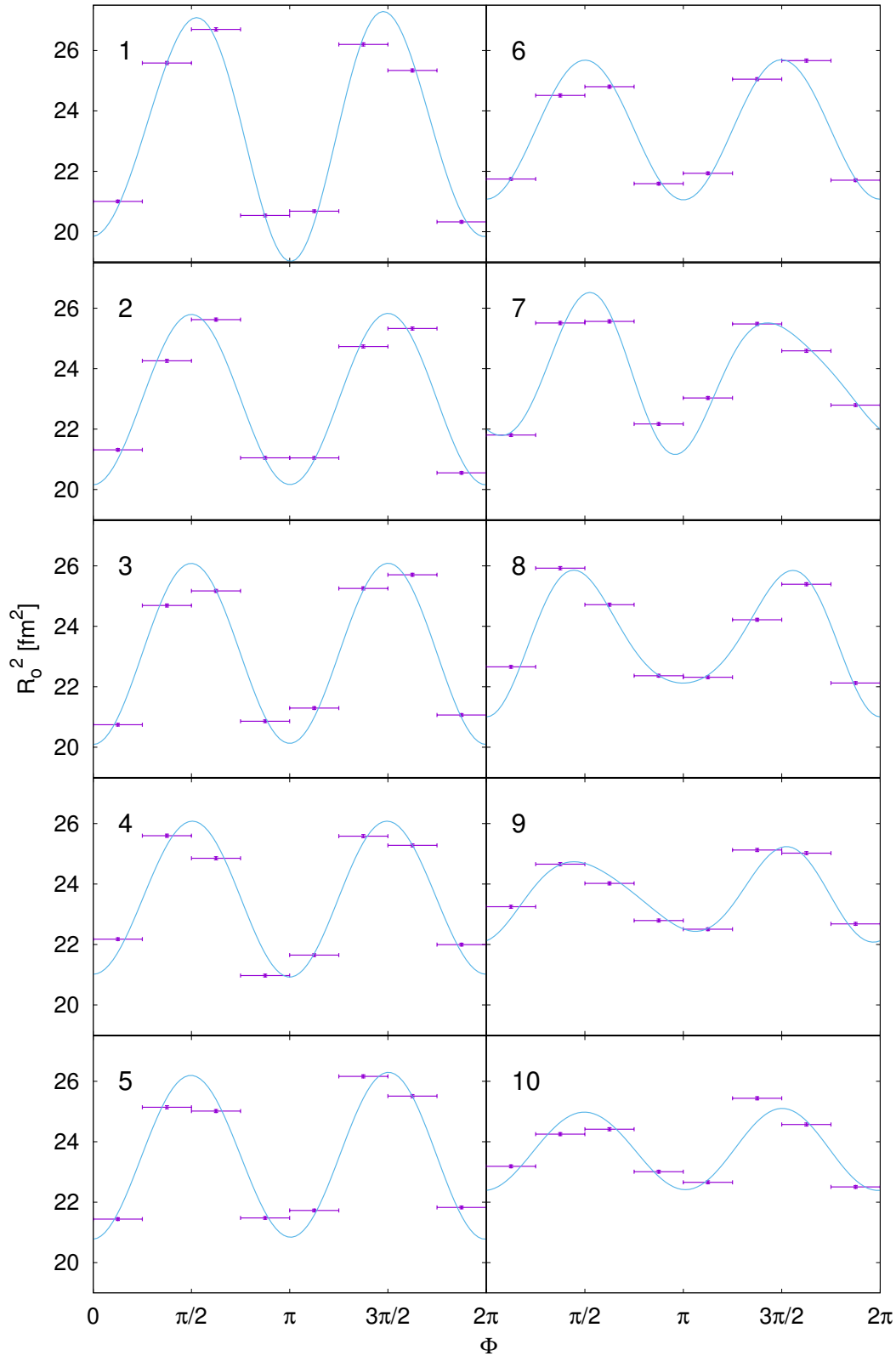
Obr. 6.2: Azimutálna závislosť korelačného polomeru R_s v jednotlivých triedach pre vzorku *DRAGON*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu korelačnej funkcie. Modrou farbou je znázornený fit výsledkov funkciou zo vzťahu (6.1).



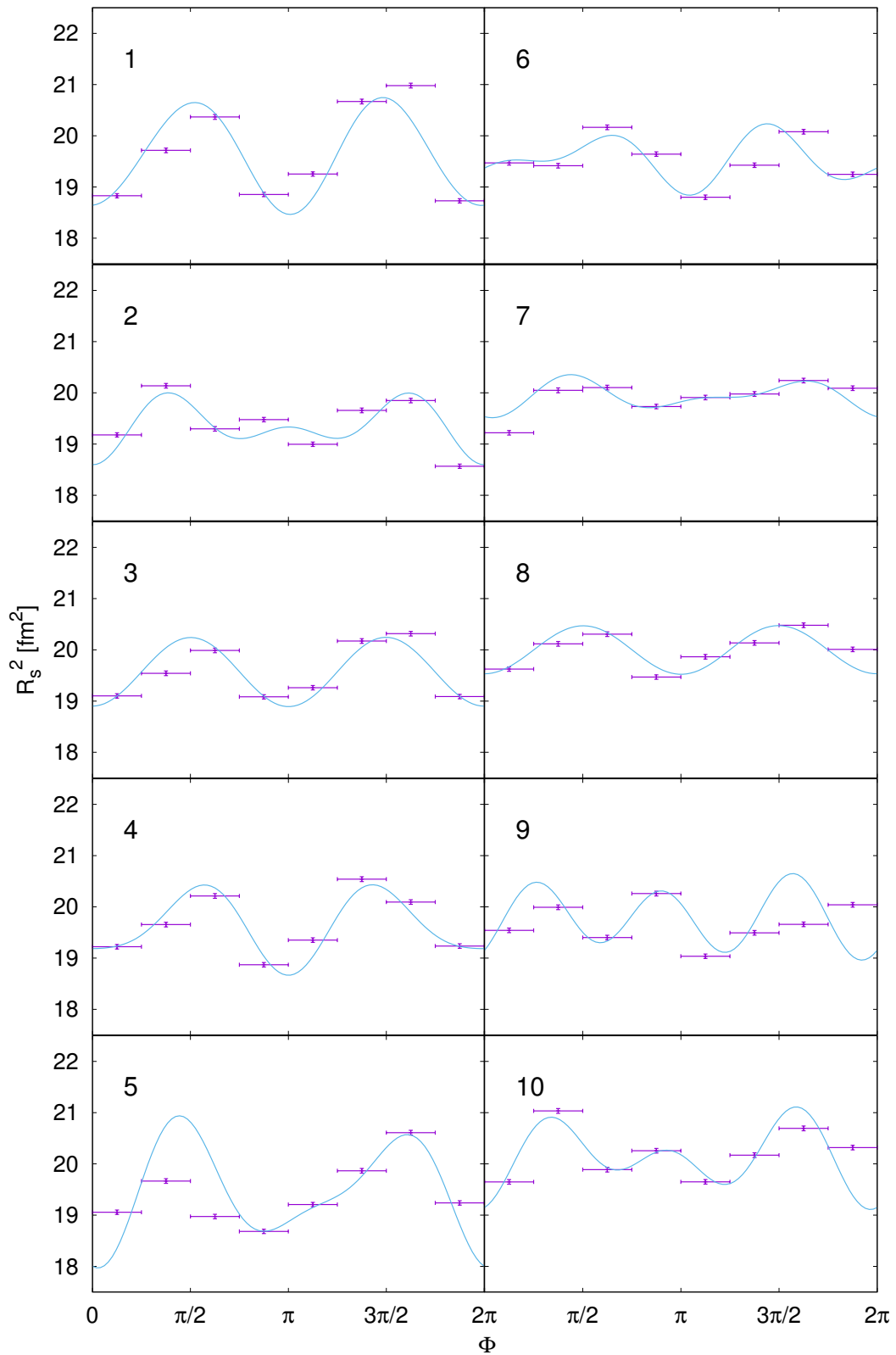
Obr. 6.3: Azimutálna závislosť korelačného polomeru R_o v jednotlivých triedach pre vzorku *URQMD*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu korelačnej funkcie. Modrou farbou je znázornený fit výsledkov funkciou zo vzťahu (6.1).



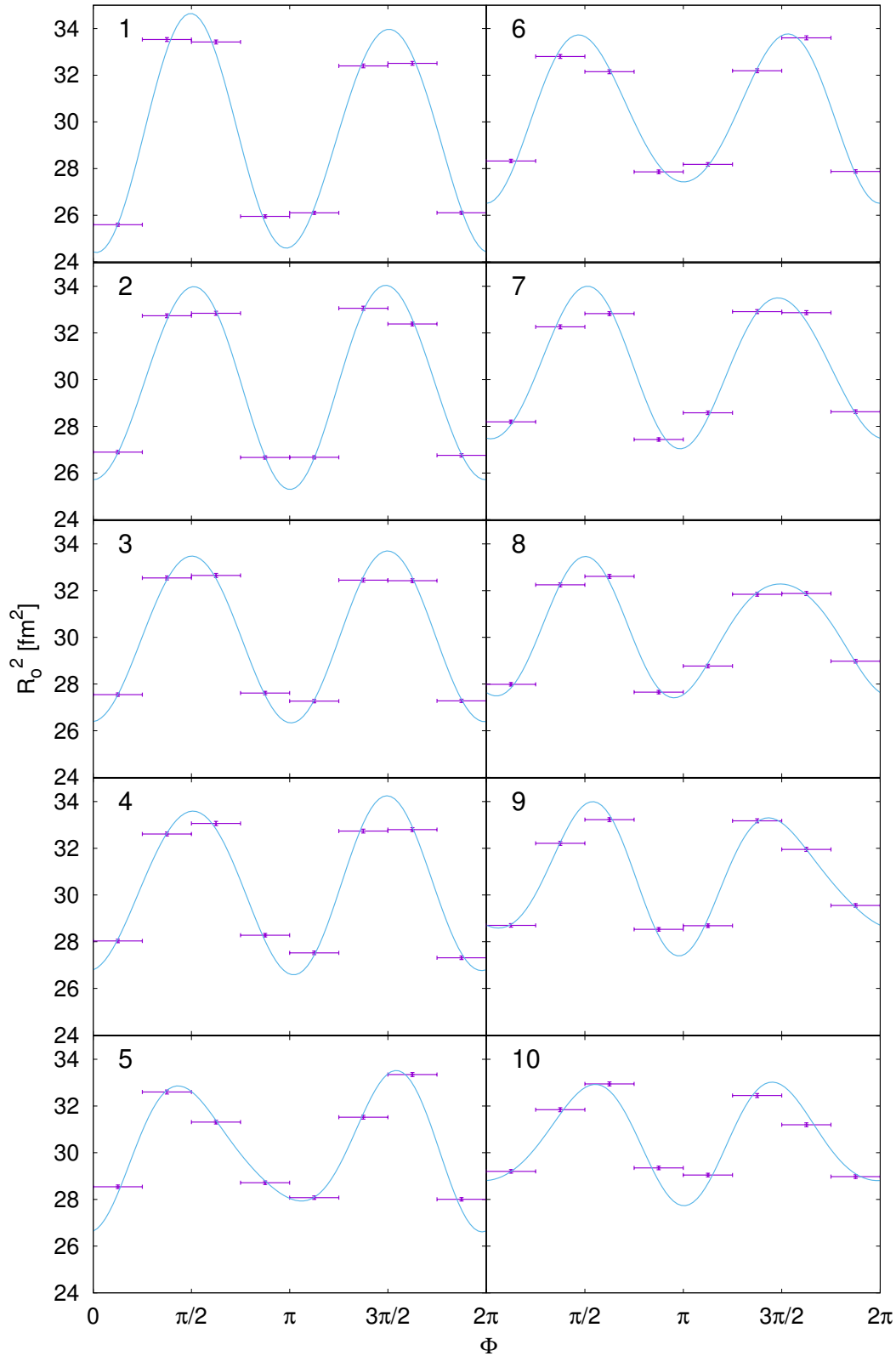
Obr. 6.4: Azimutálna závislosť korelačného polomeru R_s v jednotlivých triedach pre vzorku *URQMD*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu korelačnej funkcie. Modrou farbou je znázornený fit výsledkov funkciou zo vzťahu (6.1).



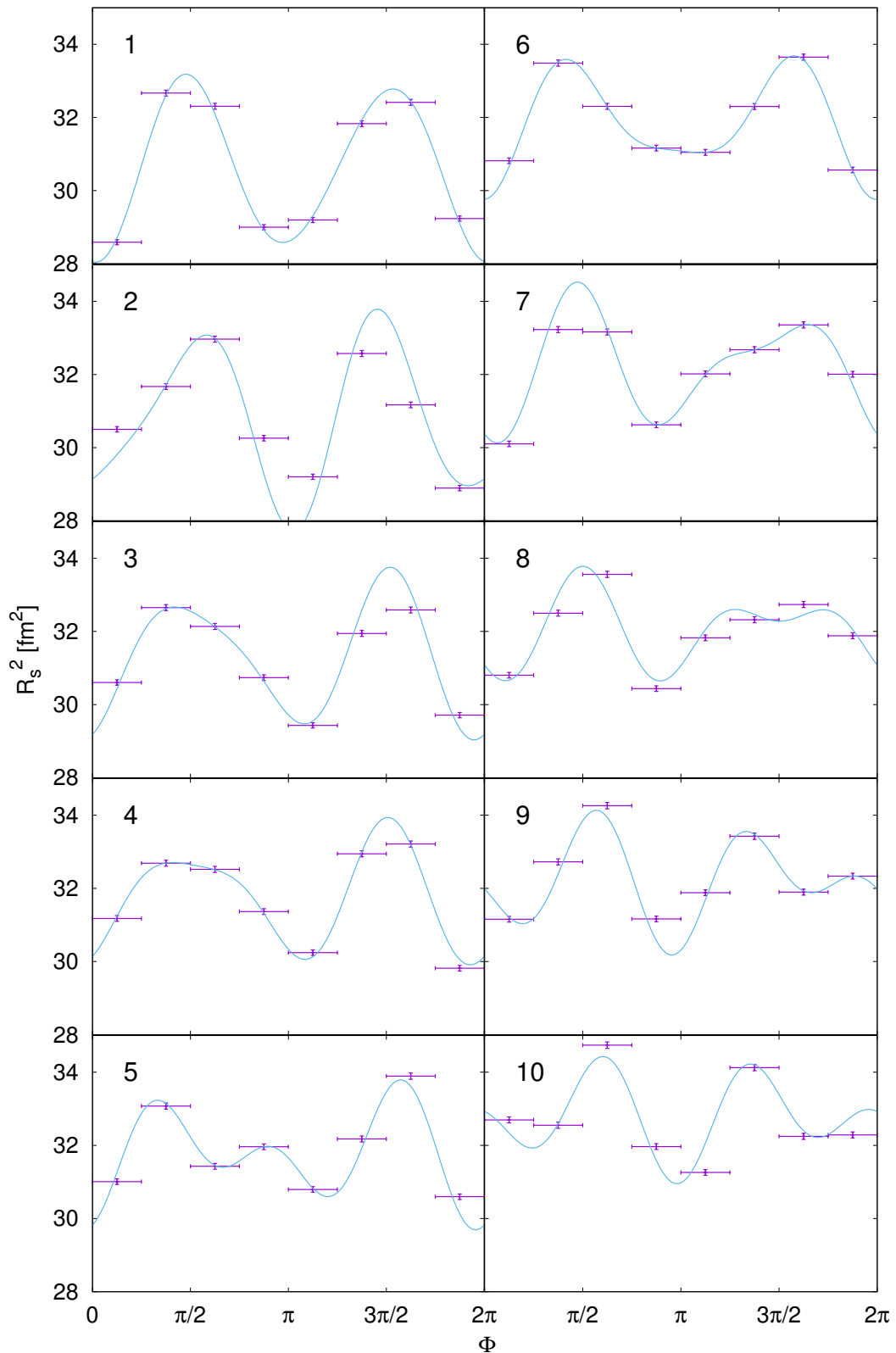
Obr. 6.5: Azimutálna závislosť korelačného polomeru R_o v jednotlivých triedach pre vzorku *AMPT-RHIC*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu korelačnej funkcie. Modrou farbou je znázornený fit výsledkov funkciou zo vzťahu (6.1).



Obr. 6.6: Azimutálna závislosť korelačného polomeru R_s v jednotlivých triedach pre vzorku *AMPT-RHIC*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu korelačnej funkcie. Modrou farbou je znázornený fit výsledkov funkciou zo vzťahu (6.1).



Obr. 6.7: Azimutálna závislosť korelačného polomeru R_o v jednotlivých triedach pre vzorku *AMPT-LHC*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu korelačnej funkcie. Modrou farbou je znázornený fit výsledkov funkciou zo vzťahu (6.1).



Obr. 6.8: Azimutálna závislosť korelačného polomeru R_s v jednotlivých triedach pre vzorku *AMPT-LHC*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v x -ovom smere odpovedá šírke uhlového koša, v y -ovom smere sa jedná o neistotu fitu korelačnej funkcie. Modrou farbou je znázornený fit výsledkov funkciou zo vzťahu (6.1).

6.2 Fourierove koeficienty korelačných polomerov

Rovnako ako pri spektre aj tu nás budú zaujímať koeficienty Fourierovho radu. Korelačné polomery si preto rozvineme do Fourierovho radu

$$R_\mu^2 = (R_\mu^2)_0 + \sum_{n=2}^{\infty} (R_\mu^2)_n \cos(n(\phi - \delta_n)). \quad (6.1)$$

Aby nás ale neovplyvňovala absolútna veľkosť korelačných polomerov, budú nás zaujímať iba relatívne Fourierove koeficienty, teda koeficienty v tvare $(R_\mu^2)_n / (R_\mu^2)_0$. Tieto koeficienty sme získali nafitovaním výsledkov na predchádzajúcich obrázkoch. Výsledné Fourierove koeficienty pre všetky vzorky sú znázornené na obrázku 6.9 pre R_o a 6.10 pre R_s .

Na obrázkoch si opäť môžeme všimnúť niekoľko zaujímavých detailov. V prvom rade vidíme, že anizotropia druhého rádu takmer vo všetkých prípadoch klesá z maximálnej hodnoty¹ na minimálnu. Jedinou výnimkou je R_s pre vzorku *DRAGON*, v ktorej nemáme maximum v triede 1, ale niekde medzi triedami 2 a 3. V prvej triede máme namiesto toho mierny pokles.

Ďalej si môžeme všimnúť, že zatiaľ čo vzorky *DRAGON* a *URQMD* predpokladajú polomery R_o a R_s v protifáze, vzorky *AMPT* predpokladajú rovnakú fázu oboch korelačných polomerov. To súhlasí s výsledkami z kapitoly 4.

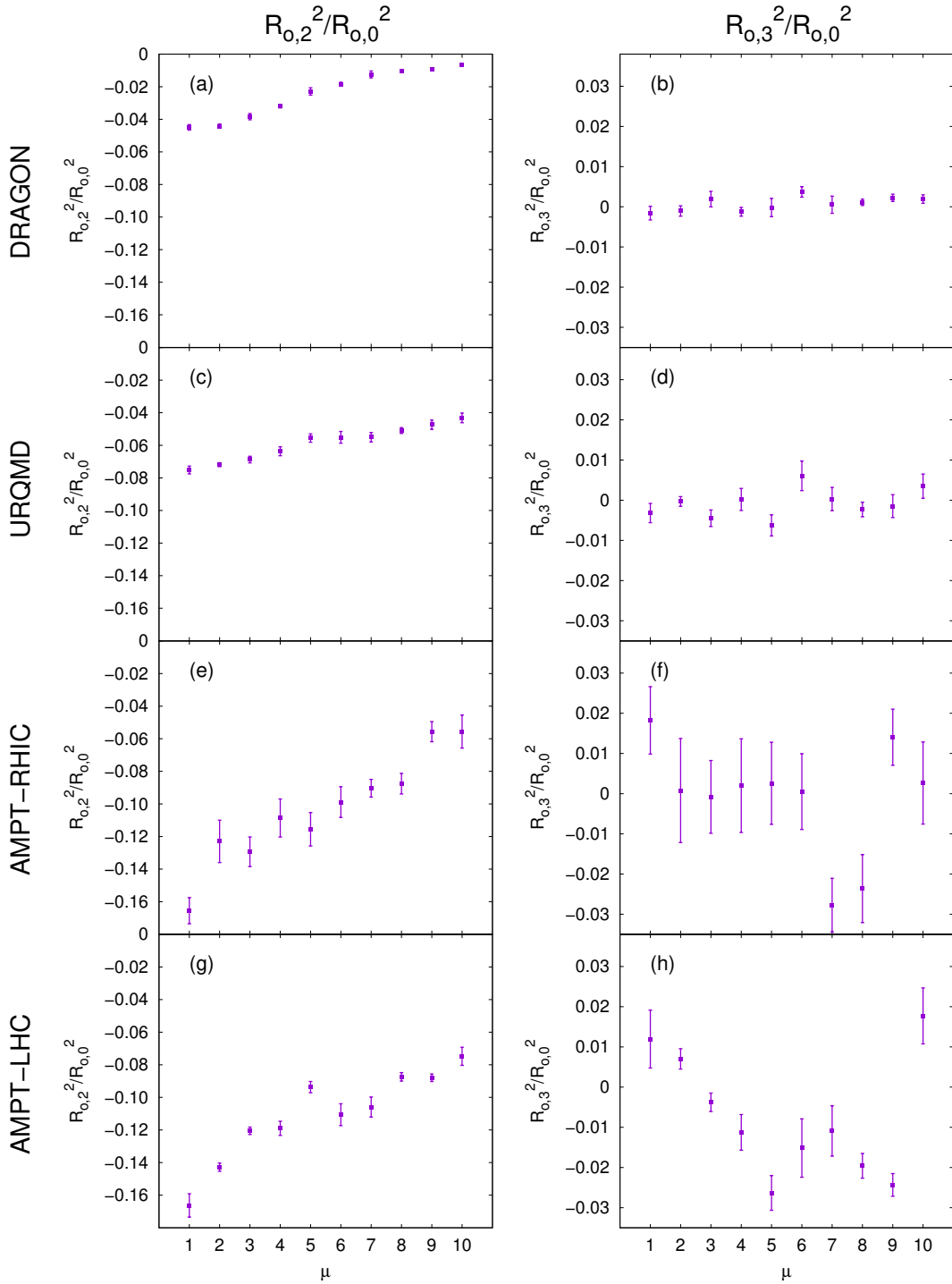
Zaujímavé je tiež to, že vzorky *AMPT* majú oveľa väčšie chyby fitu, ako zvyšné dve vzorky. To však nie je spôsobené zlou štatistikou, ale nepresnosťou fitu. Keď sa pozrieme na obrázky 6.1 až 6.8, uvidíme, že vzorky *AMPT* majú výsledky, ktoré sa nedajú nafitovať danou funkciou tak dobre, ako sa dajú nafitovať výsledky pre vzorky *DRAGON* a *URQMD*. K zlepšeniu týchto výsledkov by mohlo pomôcť rozdelenie častíc do väčšieho počtu uhlových košov, čo by však značne zvýšilo výpočtový čas.

Zatiaľ čo Fourierove koeficienty spektra v_2 a v_3 nadobúdali približne rovnaké hodnoty pre všetky vzorky, tu vidíme, že vzorky *DRAGON* a *URQMD* majú vo všeobecnosti menšie hodnoty koeficientov druhého aj tretieho rádu ako vzorky *AMPT*, ktoré sú si v tomto smere dosť podobné.

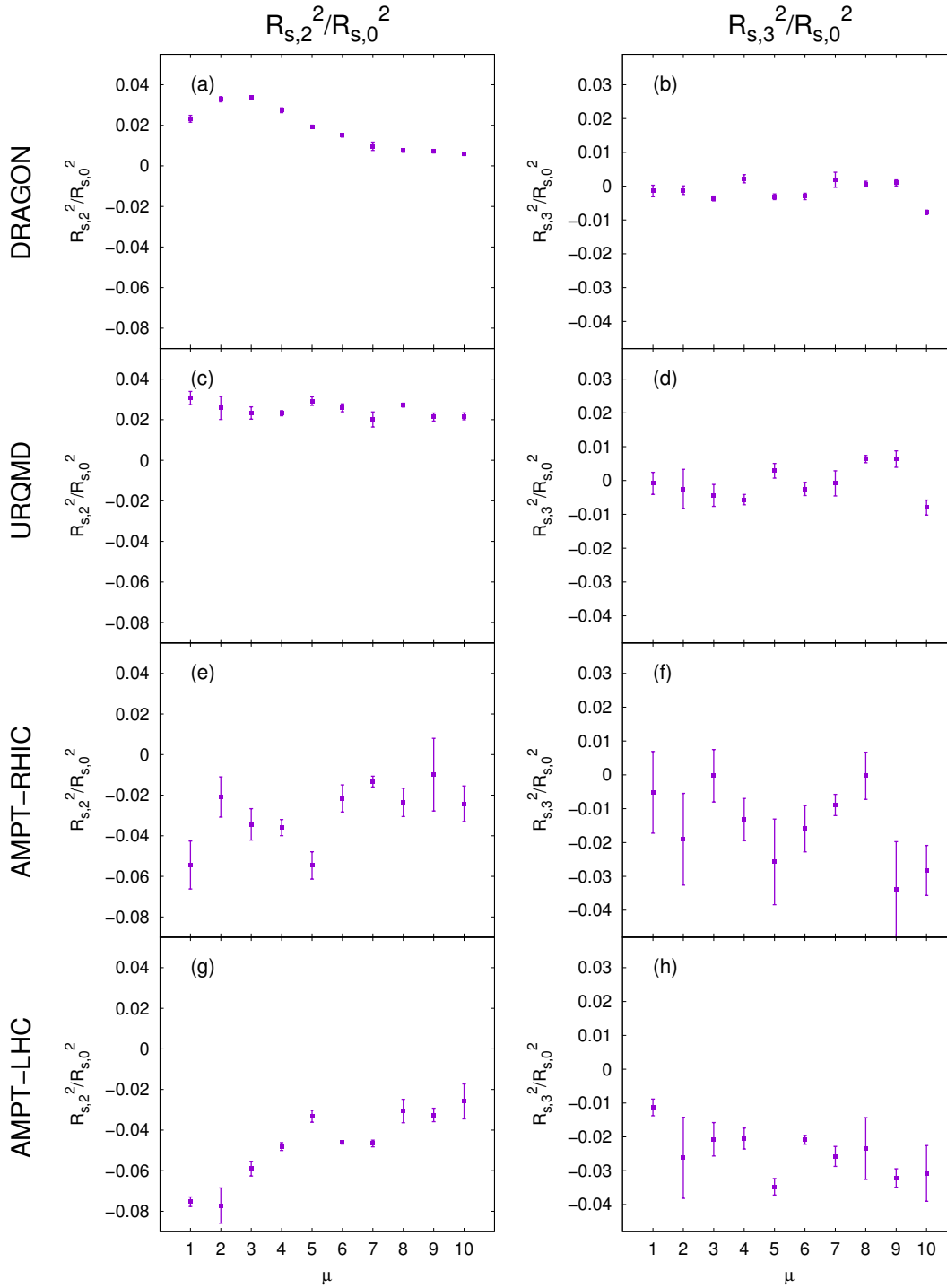
Hlavným výsledkom tejto kapitoly je však to, že vďaka zoradeniu udalostí podľa podobnosti sa nám v jednotlivých triedach ukazuje anizotropia druhého a tretieho rádu súčasne. To sme videli už aj na Fourierovom rozklade spektra a opäť to vidíme aj tu pri Fourierovom rozklade korelačných polomerov.

Tiež sme poukázali na rozdiel medzi dvoma modelmi, ktoré simulujú vývoj ultra-relativistických jadrových zrážok: *UrQMD* a *AMPT*. Toto je nový typ pozorovania, v ktorom sme uvideli takýto rozdiel.

¹máme na mysli absolútnu hodnotu



Obr. 6.9: Relatívne Fourierove koeficienty korelačného polomeru R_o v jednotlivých triedach pre všetky vzorky. Naľavo je znázornená anizotropia druhého rádu pomocou koeficientu $(R_o^2)_2/(R_o^2)_0$, napravo anizotropia tretieho rádu vyjadrená cez $(R_o^2)_3/(R_o^2)_0$. V riadkoch sú postupne vzorky *DRAGON*, *URQMD*, *AMPT-RHIC* a *AMPT-LHC*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v y -ovom smere značí neistotu fitu korelačného polomeru.



Obr. 6.10: Relatívne Fourierove koeficienty korelačného polomeru R_s v jednotlivých triedach pre všetky vzorky. Naľavo je znázornená anizotropia druhého rádu pomocou koeficientu $(R_s^2)_2/(R_s^2)_0$, napravo anizotropia tretieho rádu vyjadrená cez $(R_s^2)_3/(R_s^2)_0$. V riadkoch sú postupne vzorky *DRAGON*, *URQMD*, *AMPT-RHIC* a *AMPT-LHC*. Korelačné funkcie boli počítané z piónov s rapiditou $|Y| < 1$. Chyba v y -ovom smere značí neistotu fitu korelačného polomeru.

Záver

Táto práca bola rozdelená na dve hlavné časti. V prvej časti práce bolo našim cieľom ukázať, aký vplyv má ustredňovanie a sčítavanie udalostí na tvar korelačnej funkcie.

Výsledky z experimentálnych dát ukazujú, že korelačná funkcia nemá presný gaussovský tvar, ale je mierne odlišná. V našej práci sme však ukázali, že to, že je korelačná funkcia negaussovská, môže vyplývať aj z toho, že sa pri spracovaní dát z experimentu sčítavajú udalosti s rôznymi tvarmi či rôzne otočené udalosti. Ukázali sme, že aj keby boli výsledkom jednotlivých udalostí gaussovské korelačné funkcie, ustredňovaním cez veľkosť zdroja sa táto vlastnosť stratí, a výsledkom bude negaussovská korelačná funkcia.

To, ako veľmi je korelačná funkcia negaussovská, vieme veľmi pekne pozorovať pomocou Lévyho parametru. Máme teda aj kvantitatívnu ukážku toho, že ustredňovanie skutočne spôsobuje to, že sa výsledok vzdiaľuje od gaussovskej funkcie. To ukázalo aj posledné cvičenie, kedy sme sa pozreli na korelačné funkcie z Blast-wave modelu. Zobrali sme rôzne otočené korelačné funkcie a jednoducho sme ich ustrednili. Výsledkom bola zmena Lévyho parametru, a teda že sa nám korelačná funkcia v dôsledku ustrednenia vzdialila od gaussovskej funkcie.

V druhej časti práce sme sa pozreli na simulované udalosti. Naším hlavným cieľom bola korelačná femtoskopia v triedach podobných udalostí. Vygenerovali sme si udalosti pomocou generátorov udalostí DRAGON, AMPT a UrQMD. Takýmto spôsobom sme si pripravili štyri vzorky udalostí:

1. *DRAGON* - 150 000 udalostí vygenerovaných programom DRAGON s parametrami anizotropií $a_2, \rho_2 \in (-0, 1; 0, 1)$ a $a_3, \rho_3 \in (-0, 03; 0, 03)$
2. *URQMD* - 100 000 udalostí vygenerovaných programom UrQMD s parametrami zrážok $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$, $b_{min} = 7 \text{ fm}$ a $b_{max} = 10 \text{ fm}$, pričom zrážaným nuklidom bolo zlato 197
3. *AMPT-RHIC* - 10 000 udalostí vygenerovaných programom AMPT s parametrami zrážok $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$, $b_{min} = 7 \text{ fm}$ a $b_{max} = 10 \text{ fm}$, pričom zrážaným nuklidom bolo zlato 197
4. *AMPT-LHC* - 10 000 udalostí vygenerovaných programom AMPT s parametrami

zrážok $\sqrt{s_{NN}} = 2760\text{GeV}$, $b_{min} = 7\text{fm}$ a $b_{max} = 10\text{fm}$, pričom zrážaným nukldiom bolo olovo 208

Tieto udalosti majú rôzne tvary, medzi ktorými sme sa snažili nájsť navzájom podobné udalosti. Aby sme sa vyhli tomu, že dve podobné udalosti budú len rôzne otočené, otočili sme všetky udalosti jedným smerom, teda tak, aby mali uhol θ_2 nulový.

Takto pootáčané udalosti majú tú vlastnosť, že v súčte sa anizotropia druhého rádu nasčíta, zatiaľ čo anizotropia tretieho rádu sa vyruší. To môžeme veľmi pekne pozorovať, keď určíme azimutálnu závislosť korelačných polomerov. To sme urobili pre všetky štyri vzorky. Vo všetkých štyroch prípadoch môžeme vidieť jasnú harmonickú zložku $\cos(2x)$.

Aby sme uvideli aj tretí rád anizotropií, museli sme udalosti zoradiť podľa ich podobnosti. Na to sme využili metódu triedenia udalostí podľa tvaru. Podľa algoritmu opísaného v kapitole 4 sme zoradili udalosti a následne sme ich roztriedili do desiatich tried. V každej triede sa tak nachádzali podobné udalosti. Medzi jednotlivými triedami sa priemerný tvar udalostí menil. To sme mohli pozorovať už určením Fourierových koeficientov spektra častíc. Tam sme videli, ako sa postupne vyvíja anizotropia druhého a tretieho rádu v triedach. Tu sme tiež poprvýkrát videli, že v jednotlivých triedach môžeme pozorovať anizotropiu druhého a tretieho rádu súčasne.

Nakoniec v poslednej kapitole sme v každej triede opäť určili azimutálnu závislosť korelačných polomerov. Na týchto obrázkoch môžeme pekne vidieť, ako sa uhlová závislosť a teda aj priemerný tvar udalosti a tiež oblasti homogenity mení medzi jednotlivými triedami. Taktiež tu môžeme vidieť aj kombináciu anizotropií druhého aj tretieho rádu na jednom grafe.

Všetky tieto výpočty sme urobili na všetkých štyroch vzorkách a tak môžeme pozorovať, v čom sú generátory udalostí podobné a v čom odlišné. Videli sme, že pri spektre boli najviac podobné vzorky *URQMD* a *AMPT-RHIC*, ktoré sú obe generované pri rovnakej energii zrážok. Pri korelačných polomeroch si boli najviac podobné vzorky *DRAGON* s *URQMD* a tiež *AMPT-RHIC* s *AMPT-LHC*. Na veľkosť korelačných polomerov má totiž generátor udalostí väčší vplyv, ako mal na spektrum častíc a preto tu nevidíme takú dobrú podobnosť medzi *URQMD* a *AMPT-RHIC*.

Literatúra

- [1] A. Mocsy a P. Sorensen, *The Sound of the Little Bangs*. arXiv:1008.3381. [online] <https://www.bnl.gov/rhic/inside/news.php?a=21795>.
- [2] J. Adams et al, *Azimuthally Sensitive Hanbury Brown–Twiss Interferometry in Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV*. Physical Review Letters 93, 012301 (2004).
- [3] B. Tomášik, *Disentangling spatial and flow anisotropy*. Acta Physica Polonica B 36, 2087 (2005).
- [4] F. Cooper a G. Frye, *Comment on the Single Particle Distribution in the Hydrodynamic and Statistical Thermodynamic Models of Multiparticle Production*. Physical Review D 71, 186 (1974).
- [5] F. Retière a M. Lisa, *Observable implications of geometrical and dynamical aspects of freeze-out in heavy ion collisions*. Physical Review C 70, 044907 (2004)
- [6] R. Rapp a H. van Hees, *Heavy Quark Diffusion as a Probe of the Quark-Gluon Plasma*.
- [7] B. Alver a G. Roland, *Collision geometry fluctuations and triangular flow in heavy-ion collisions*. Physical Review C 81, 054905 (2010).
- [8] B. Alver, *Initial geometry fluctuations and Triangular flow*. Glasma Workshop (2010).
- [9] ALICE Collaboration, *Centrality determination of Pb-Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$ TeV with ALICE*. Physical Review C 88, 044909 (2013).
- [10] B. Tomášik, *DRAGON: Monte Carlo generator of particle production from a fragmented fireball in ultrarelativistic nuclear collisions*. Computer Physics Communications 180, 1642 (2009).
- [11] L. Garren et al, *44. Monte Carlo Particle Numbering Scheme* (2017); [online] <http://pdg.lbl.gov/2017/reviews/rpp2017-rev-monte-carlo-numbering.pdf>.

- [12] Z. Lin et al, *A Multi-Phase Transport Model for Relativistic Heavy Ion Collisions*. Physical Review C 72, 064901 (2005).
- [13] X. N. Wang, *Role of multiple minijets in high-energy hadronic reactions*. Physical Review D 43, 104 (1991).
- [14] X. N. Wang a M. Gyulassy, *HIJING: A Monte Carlo model for multiple jet production in pp, pA, and AA collisions*. Physical Review D 44, 3501 (1991).
- [15] X. N. Wang a M. Gyulassy, *Systematic study of particle production in p + p(\bar{p}) collisions via the HIJING model*. Physical Review D 45, 844 (1992).
- [16] M. Gyulassy a X. N. Wang, *HIJING 1.0: A Monte Carlo program for parton and particle production in high energy hadronic and nuclear collisions*. Computer Physics Communications 83, 307 (1994).
- [17] B. Zhang, *ZPC 1.0.1: a parton cascade for ultrarelativistic heavy ion collisions*. Computer Physics Communications 109, 193 (1998).
- [18] B. Andersson, G. Gustafson a B. Soderberg, *Baryon Production in Jet Fragmentation and γ -Decay*. Zeitschrift für Physik C 20, 317 (1983).
- [19] B. Andersson, G. Gustafson, G. Ingelman a T. Sjostrand, *Parton fragmentation and string dynamics*. Physics Reports 97, 31 (1983).
- [20] T. Sjostrand, *High-energy-physics event generation with PYTHIA 5.7 and JETSET 7.4*. Computer Physics Communications 82, 74 (1994); <http://www.thep.lu.se/tf2/staff/torbjorn/Pythia.html>.
- [21] B. A. Li a C. M. Ko, *Formation of superdense hadronic matter in high energy heavy-ion collisions*. Physical Review C 52, 2037 (1995).
- [22] B. Li, A. T. Sustich, B. Zhang a C. M. Ko, *Studies of superdense hadronic matter in a relativistic transport model*. International Journal of Modern Physics E 10, 267 (2001).
- [23] S. A. Bass et al, *Microscopic Models for Ultrarelativistic Heavy Ion Collisions*. Progress in Particle and Nuclear Physics 41, 225-370 (1998).
- [24] M. Bleicher et al, *Relativistic Hadron-Hadron Collisions in the Ultra-Relativistic Quantum Molecular Dynamics Model*. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics 25, 1859-1896 (1999).
- [25] The UrQMD group, *The UrQMD user guide*. [online] <https://urqmd.org/documentation/urqmd-user.pdf>

- [26] S. Pratt, *Correlation After Burner*. [online] <http://www.pa.msu.edu/pratts/freecodes/crab/home.html>
- [27] J. Schukraft, A. Timmins, S. A. Voloshin, *Ultra-relativistic nuclear collisions: Event shape engineering*. Physics Letters B 719, 394 (2013).
- [28] R. Kopečná a B. Tomášik, *Event shape sorting*. European Physical Journal A 52, 16115 (2016).
- [29] S. A. Bass et al, *Microscopic Models for Ultrarelativistic Heavy Ion Collisions*. Progress in Particle and Nuclear Physics 41, 225 (1998)
- [30] W. Florkowski, *Phenomenology of Ultra-Relativistic Heavy-Ion Collisions*. World Scientific, 2010. ISBN 978-981-4280-66-2.
- [31] U. A. Wiedemann, *Two-particle interferometry for noncentral heavy-ion collisions*. Physical Review C 57, 266 (1998).
- [32] C. Plumberg a U. Heinz, *Probing the properties of event-by-event distributions in Hanbury-Brown-Twiss radii*. Physical Review C 92, 044906 (2015).
- [33] T. Csörgő, S. Hegyi a W. A. Zajc, *Bose-Einstein correlations for Levy stable source distributions*. European Physical Journal C 36, 67 (2004).
- [34] C. Plumberg a U. Heinz, *HoTCoffeeh: Hanbury Brown-Twiss correlation functions and radii from event-by-event hydrodynamics*. arXiv:1611.03161.

Dodatok A

Odvodenie Gaussovského tvaru korelačnej funkcie

Aby sme si odvodili, ako vyzerá gaussova aproximácia korelačnej funkcie, začneme tým, že si korelačnú funkciu prepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} C(q, K) - 1 &= \frac{(\int d^4x S(x, K) e^{iqx}) (\int d^4y S(y, K) e^{iqy})^*}{\int d^4x S(x, K + \frac{q}{2}) \int d^4y S(y, K - \frac{q}{2})} \\ &= \frac{\int d^4x d^4y e^{iq(x-y)} S(x, K) S(y, K)}{\int d^4x d^4y S(x, K + \frac{q}{2}) S(y, K - \frac{q}{2})}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Transformáciou do súradníc $X = x - y$ a $Y = \frac{1}{2}(x + y)$ môžeme korelačnú funkciu ďalej upraviť na tvar

$$C(q, K) - 1 = \frac{\int d^4X e^{iqX} D(X, K)}{\int d^4x d^4y S(x, K + \frac{q}{2}) S(y, K - \frac{q}{2})}, \quad (6.3)$$

kde $D(X, K)$ je rozdelenie relatívnych vzdialeností definované vzťahom

$$D(X, K) = \int d^4Y S\left(Y + \frac{X}{2}\right) S\left(Y - \frac{X}{2}\right). \quad (6.4)$$

Zadefinujeme tiež normalizované rozdelenie relatívnych vzdialeností

$$d(X, K) = \frac{D(X, K)}{\int d^4Y D(Y, K)}. \quad (6.5)$$

S týmito dvomi veličinami môžeme korelačnú funkciu napísať ako

$$C(q, K) - 1 = \int d^4X e^{iqX} d(X, K). \quad (6.6)$$

V rovnici (6.4) vidíme, že násobíme dve rovnaké rozdelenia. To nám pripomína centrálnu limitnú vetu. A aj keď 2 nie je až také veľké číslo, môžeme uvažovať, že sa korelačná funkcia bude aspoň približovať Gaussovmu rozdeleniu. Uvažujeme preto parametrizáciu

$$C(q, K) - 1 \approx \exp(-q^\mu q^\nu B_{\mu\nu}(K)). \quad (6.7)$$

Koeficient $B_{\mu\nu}(K)$ určuje šírku Gaussovho rozdelenia, ktorú chceme určiť.

Korelačnú funkciu ideme skúmať v okolí bodu $q = 0$. V tomto okolí by mala mať tvar Gaussovho rozdelenia opísaného rovnicou (6.7). Rozložíme ju preto do Taylorovho radu okolo bodu $q = 0$. Na to potrebujeme poznať prvú a druhú deriváciu korelačnej funkcie v tomto bode

$$\frac{d}{dq}(C(q, K) - 1)\Big|_{q=0} = 0 \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dq^\mu dq^\nu}(C(q, K) - 1)\Big|_{q=0} = & -2 \left(\frac{\int d^4x x_\mu x_\nu S(x, K) \int d^4y S(y, K)}{P^2(K)} \right. \\ & \left. - \frac{\int d^4x x_\mu S(x, K) \int d^4y y_\nu S(y, K)}{P^2(K)} \right). \end{aligned} \quad (6.9)$$

S využitím definícií strednej hodnoty a vzdialenosti od priemeru podľa vzťahov (2.8) a (2.9) môžeme teraz Taylorov rozvoj korelačnej funkcie prepísať do tvaru

$$C(q, K) - 1 = \frac{|\int d^4x S(x, K) \exp(iqx)|^2}{P^2(K)} \approx 1 - q^\mu q^\nu \langle \tilde{x}_\mu \tilde{x}_\nu \rangle. \quad (6.10)$$

Tento Taylorov rad je totožný s Taylorovým radom exponenciálnej funkcie, a preto môžeme korelačnú funkciu zapísať v tvare

$$C(q, K) - 1 \approx \exp(-q^\mu q^\nu \langle \tilde{x}_\mu \tilde{x}_\nu \rangle). \quad (6.11)$$

Tu sa nám podarilo určiť koeficienty $B_{\mu\nu}(K) = \langle \tilde{x}_\mu \tilde{x}_\nu \rangle(K)$.

Dodatok B

Výpočet korelačnej funkcie

Korelačnú funkciu získame ako Fourierovu transformáciu emisnej funkcie. Výsledok tak bude miesto súradníc x a y závisieť na súradniciach q_o a q_s .

$$\int dx dy S(x, y) e^{i(q_o x + q_s y)} = \frac{1}{2\pi R_1 R_2} \int dy e^{-\left(b - \frac{c^2}{a}\right) y^2 + i q_s y} \int dx e^{-a\left(x - \frac{c}{a} y\right)^2 + i q_o x}. \quad (6.12)$$

Najprv spočítame integrál cez x

$$\begin{aligned} \int dx e^{-a\left(x - \frac{c}{a} y\right)^2 + i q_o x} &= \left[x - \frac{c}{a} y = t \right] = e^{i q_o \frac{c}{a} y} \int e^{-at^2 + i q_o t} dt \\ &= e^{i q_o \frac{c}{a} y} \int e^{-at^2} (\cos q_o t + i \sin q_o t) dt. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Zo symetrie vieme, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \sin(q_o t) dt = 0. \quad (6.14)$$

Integrovaním druhého členu tak dostávame výsledok integrovania cez x v tvare:

$$\int dx e^{-a\left(x - \frac{c}{a} y\right)^2 + i q_o x} = e^{i q_o \frac{c}{a} y} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{q_o^2}{4a}}. \quad (6.15)$$

Teraz sa vrátime k integrálu cez y

$$\begin{aligned} \int dx dy S(x, y) e^{i(q_o x + q_s y)} &= \frac{1}{2\pi R_1 R_2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{q_o^2}{4a}} \int e^{-(b - \frac{c^2}{a}) y^2 + i y (q_s + q_o \frac{c}{a})} dy \\ &= \frac{1}{2\pi R_1 R_2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{q_o^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{b - \frac{c^2}{a}}} e^{-\frac{(q_s + \frac{c}{a} q_o)^2}{4(b - \frac{c^2}{a})}} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Spätným dosadením za koeficienty a, b a c môžeme výsledok upraviť do prehľadnejšieho tvaru

$$\begin{aligned} C(q) - 1 &= e^{-\frac{b q_o^2 + a q_s^2 + 2 c q_o q_s}{2(ab - c^2)}} = \\ &= \exp\left(-q_o^2 (R_1^2 \cos^2 \theta_2 + R_2^2 \sin^2 \theta_2) - q_s^2 (R_1^2 \sin^2 \theta_2 + R_2^2 \cos^2 \theta_2) - \right. \\ &\quad \left. - q_o q_s \sin 2\theta_2 (-R_1^2 + R_2^2)\right). \end{aligned} \quad (6.17)$$